

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT 2

2. DERECEDEN DENKLEMLER

Tanım: a, b ve c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere;

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denklemine, **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

ÖRNEK

$(m - 3)x^3 + x^{n-2} + x - 3 = 0$ denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre $m \cdot n$ kaçtır?

2. Dereceden Denklemlerin Çözümü

A) Çarpanlara Ayırma Yöntemi

$f(x) \cdot g(x) = 0$ ise, $f(x) = 0$ veya $g(x) = 0$ olmalıdır.

ÖRNEK

$x^2 - x - 6 = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$4x^2 - 16x = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$3x^2 - 27 = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + 4 = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$2x^2 - (b - 2a)x - ab = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

B) Diskriminant (Δ) Yöntemi

$a \neq 0$ olmak üzere,

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

$\Delta = \text{diskriminant} = b^2 - 4ac$ ile bulunur.

- $\Delta > 0$ ise denklemin farklı 2 reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{bulunur.}$$

- $\Delta = 0$ ise denklemin çakışık 2 reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ ile bulunur.}$$

Bu köklere eşit, aynı veya çift katlı kök isimleri de verilir.

- $\Delta < 0$ ise denklemin reel sayılarda kökü yoktur. Ç. K. = $\emptyset$ 'dir.

ÖRNEK

$x^2 + 3x - 5 = 0$ denkleminin köklerini diskriminant yöntemiyle bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 4x + m - 2 = 0$ denkleminin farklı 2 reel kökü olduğuna göre m 'nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÖRNEK

$2x^2 + (m - 3)x + 18 = 0$ denkleminin çakışık 2 reel kökü olduğuna göre m 'nin alabileceği farklı değerlerin çarpımını bulunuz.

ÖRNEK

$mx^2 + 8x - 2 = 0$ denkleminin reel kökü olmadığına göre, m 'nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

NOT

Denklemin kökü daima denklemi sağlar.

ÖRNEK

$x^2 + (m + 2)x - 2m + 3 = 0$ denkleminin bir kökü 3 ise m'yi bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (2m - 1)x - 3m = 0$ denkleminin köklerinden biri -2 ise diğer kökü bulunuz.

ÖRNEK

$mx^2 - nx - 15 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 3$ ve $x_2 = 5$ ise $m + n$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$2x^2 - 3x + 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. Buna göre;

$\frac{4x_2^2 - 6x_2 + 3}{2x_1^2 - 3x_1 + 7}$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. Dereceden Denklemlerin Çözümünden Yararlanılarak Çözülebilien Denklemler

A) Polinomların Bölümü Şeklindeki Denklemlerin Çözümü

$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ ise $P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$ olmalıdır.

ÖRNEK

$\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 3} = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9} = 0$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{x^2 - 2x - 8}{x - m} = 0$ denkleminin bir kökü olduğuna göre m 'nin alabileceği değerlerin çarpımını bulunuz.

B) Köklü Denklemlerin Çözümü

Köklü ifade içeren denklemlerin çözümü yapılırken önce köklü ifade eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır. Kökün derecesine göre her iki tarafın kuvveti alınarak kök kaldırılır. Ancak bulunan köklerin denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

ÖRNEK

$1 + \sqrt{3x - 5} = x$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 6} = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\sqrt{x + \sqrt{x + 3}} = 3$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-1} = 7$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

C) Yardımcı Bilinmeyen Kullanılarak Çözülebilen Denklemler

ÖRNEK

$x^4 - x^2 - 12 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$(x^2 - 2x)^2 - 11 \cdot (x^2 - 2x) + 24 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\sqrt{x} - 5 \cdot \sqrt[4]{x} + 6 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$$\frac{2x + 1}{x - 1} + \frac{4x - 4}{2x + 1} = 5 \text{ denkleminin } \mathbb{R}'\text{deki çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$x^2 - |x| - 2 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

2. Dereceden Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki Bağıntılar

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere,

$$\text{Kökler Toplamı} = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Kökler Çarpımı} = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Kökler Farkı} = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

NOT

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$
- $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$

ÖRNEK

$2x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. Buna göre,

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $|x_1 - x_2|$ bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (n - 3)x + 3n - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre n 'yi bulunuz.

ÖRNEK

k , bir pozitif reel sayı olmak üzere;

$2x^2 + kx - 1 = 0$ denkleminin kökler farkı 2 olduğuna göre k kaçtır?

ÖRNEK

$x^2 + 4x + 3m - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

$x_1 - 2x_2 = 10$ olduğuna göre m 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (3m - 1)x + 27 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

$x_1 = x_2^2$ olduğuna göre m 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 6x - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

Buna göre $x_1^2 + x_2^2$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (k + 2)x + k + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 48$ ise k 'nin pozitif değerini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

Buna göre; $x_1^3 + x_2^3$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + 4x + 16 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

Buna göre; $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (m + 2)x - 8 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

$(x_1 + 5) \cdot (x_2 + 5) = 7$ olduğuna göre m 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (x_1 - 1)x - 4x_2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. Buna göre büyük kökü bulunuz.

NOT

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri simetrikse, $x_1 = -x_2$, buna göre;

$x_1 + x_2 = 0$ ve $x_1x_2 < 0$ olur.

ÖRNEK

$x^2 - (m^2 - 4)x + m + 1 = 0$ denkleminin kökleri simetrikse bu kökleri bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 4xy - 2y^2 = 0$ denkleminde x ve y sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere;

$\frac{x}{y}$ nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (m + 2)x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

Bu kökler arasında; $x_1 \cdot x_2^2 = 12$ bağıntısı varsa m 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + ax + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

$x_1 + \frac{1}{x_2} = 1$ olduğuna göre a 'yı bulunuz.

ÖRNEK

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde katsayılar arasında $4a + c = 2b$ bağıntısı varsa bu denklemin köklerini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. Buna göre, köklerin oranının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

Buna göre $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$$x^2 + (2m + 3)x - 6 = 0$$

$x^2 + 2mx - 9 = 0$ denklemlerinin birer kökleri ortak olduğuna göre m 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - mx + 3n = 0$ denkleminin bir kökü 1;

$x^2 + kx + 2n - 1 = 0$ denkleminin bir kökü 3'tür. Bu iki denklemin diğer kökleri eşit olduğuna göre n 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$2x^2 + 2x + m = 0$ denkleminin köklerinin rasyonel olmasını sağlayan m 'nin en küçük doğal sayı değerini bulunuz.

Kökleri Verilen 2. Dereceden Denklemi Yazma

Kökleri x_1 ve x_2 olan 2. dereceden denklemi yazmak için köklerin toplamına ve çarpımına ihtiyaç vardır.

$T = x_1 + x_2$ ve $\Ç = x_1 \cdot x_2$ olmak üzere,

$$x^2 - T \cdot x + \Ç = 0$$

NOT: Rasyonel katsayılı 2. dereceden denklemin köklerinden biri $a + \sqrt{b}$ ise diğeri $a - \sqrt{b}$ dir.

ÖRNEK

Kökleri -2 ve 3 olan 2.dereceden denklemi yazınız.

ÖRNEK

Rasyonel katsayılı 2. dereceden bir bilinmeyenli denklemin köklerinden biri $2 - \sqrt{3}$ ise bu denklemi kurunuz.

ÖRNEK

Rasyonel katsayılı 2. dereceden bir bilinmeyenli denklemin köklerinden biri $\sqrt{5} - 1$ ise bu denklemi kurunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 6x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $x_1 - 4$ ve $x_2 - 4$ olan 2. dereceden denklemi kurunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 8x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $3x_1 - 1$ ve $3x_2 - 1$ olan 2. dereceden denklemi kurunuz.

ÖRNEK

$x^2 + 3x - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan 2. dereceden denklemi bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - (m - 2)x - n + 1 = 0$ denkleminin kökleri,

$x^2 + mx - 2n = 0$ denkleminin köklerinden 2'ser fazla olduğuna göre $m \cdot n$ çarpımını bulunuz.

ÖRNEK

Kökleri x_1 ve x_2 olan 2.dereceden denklemin kökleri arasında

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2 = 18$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_1x_2 = 5$$

bağıntısı olduğuna göre bu denklemi bulunuz.