

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT 2

2.DERECEDEN EŞİTSİZLİKLER

a, b ve c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere;

I) $\Delta > 0$ iken $ax^2 + bx + c$ 'nin işareti:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve $x_1 < x_2$ olsun.

Bu durumda $ax^2 + bx + c$ 'nin işaret tablosu;

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	a ile ters işaretli	a ile aynı işaretli	
		○	○	

2) $\Delta = 0$ iken $ax^2 + bx + c$ 'nin işareti:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çakışık (eşit) kökleri $x_1 = x_2$ olsun.

Bu durumda $ax^2 + bx + c$ 'nin işaret tablosu;

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
ax^2+bx+c	a ile aynı işaretli	a ile aynı işaretli	
			

3) $\Delta < 0$ iken $ax^2 + bx + c$ 'nin işareti:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel kökü yoktur.

Bu durumda $ax^2 + bx + c$ 'nin işaret tablosu;

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	

ÖRNEK

$x^2 - 2x - 3 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - x - 6 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + 8x + 12 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + x - 20 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 4x + 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + 6x + 9 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$a < b < 0$ olmak üzere;

$x^2 - (a + b)x + a.b < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + 2x + 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

NOT

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ iken;

- 1) $ax^2 + bx + c > 0$ eşitsizliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa;
 $\Delta < 0$ ve $a > 0$ olmalıdır.
- 2) $ax^2 + bx + c < 0$ eşitsizliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa;
 $\Delta < 0$ ve $a < 0$ olmalıdır.

ÖRNEK

$a \in \mathbb{R}$ iken

$x^2 - ax + 9 > 0$ eşitsizliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa a 'nın alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$a \in \mathbb{R}$ iken

$-3x^2 + 2x - a < 0$ eşitsizliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa a 'nın en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 + 4x + a$ ifadesi daima 3 'ten büyük olduğuna göre, a 'nın en küçük tam sayı değerini bulunuz.

$P(x).Q(x)$ Çarpımının İşareti

$P(x).Q(x)$ çarpımının işaretini belirlemek için her bir çarpanın ayrı ayrı kökleri bulunur. Bu kökler işaret tablosunda küçükten büyüğe sıralanır. $P(x)$ ve $Q(x)$ 'in baş katsayılarının işaretleri çarpılarak sistemin işareti belirlenir. Bulunan işaret, tablonun en sağına yazılır. Sonra tablonun soluna doğru tek katlı köklerde işaret değiştirilir, çift katlı köklerde işaret değiştirilmez.

tek katlı kök	→	kök sayısı tek olan
çift katlı kök	→	kök sayısı çift olan

ÖRNEK

$(x + 3) \cdot (x - 2) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$(2x + 3) \cdot (x - 5) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x \cdot (x + 1) \cdot (4 - x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$(x^2 - 9) \cdot (x + 2)^2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

Bir tam sayının karesi, kendisinin 2 katından küçüktür. Bu tam sayıyı bulunuz.

ÖRNEK

$(x^3 + 8) \cdot (x^2 - 4) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$2^x \cdot (3 - x) \cdot (x^2 - x - 2) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$(x + 1)^{1993} \cdot (x - 2)^{2008} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$|x - 3| \cdot (6x^2 - x - 2) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$(x^2 + x + 1) \cdot (4 - x) \cdot 3^{x-1} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^3 + x^2 + x + 1 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$(|x - 2| - 1) \cdot (x + 3) \cdot x^2 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$a < b < 0$ olmak üzere;

$(ax - b) \cdot (x + b) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin İşareti

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin işaretini belirlemek için pay ve paydadaki her bir çarpanın ayrı ayrı kökleri bulunur. Bu kökler

işaret tablosunda küçükten büyüğe doğru sıralanır.

$P(x)$ ve $Q(x)$ 'in baş katsayılarının işaretleri çarpılarak sistemin işareti belirlenir. Belirlenen işaret, tablonun en sağına yazılır. Sonra tablonun soluna doğru ilerlerken tek katlı köklerde işaret değiştirilir, çift katlı köklerde işaret değiştirilmez. Paydanın kökleri çözüm kümesine dahil edilmez.

ÖRNEK

$$\frac{(x + 1) \cdot (x - 2)}{x + 3} < 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\frac{x^2 - 1}{2 - x} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x - 4} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{x^3 - 8}{x^2} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{x^2 + 3x}{x + 1} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{(x^2 - 4) \cdot (x + 1)} \geq 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\frac{(x-1)^{1905} \cdot (2-x)^{2014}}{x^2 + x + 4} \geq 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\frac{|x+3| \cdot (x-1)}{x^2-2} \geq 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\frac{(x^3 - 8)^3 \cdot (x + 1)^2}{x^2 \cdot (x - 1)} < 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\frac{2^{-x+1} \cdot (x^2 - 3x)}{x+1} \leq 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\frac{(|x-3|-2) \cdot 3^{x+1}}{x^2 \cdot (x+4)} > 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\frac{8}{x} > \frac{x}{2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{x+3}{x-1} \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$$\frac{(1 - 3^x) \cdot (2x^2 - 18)}{(4^x - 8)} \geq 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\frac{(x^2 - 25) \cdot |x - 4|}{3^{x+1} \cdot \sqrt{x - 2}} \leq 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

Eşitsizlik Sistemleri

İki veya daha fazla eşitsizliğin bir arada olmasına **eşitsizlik sistemi** denir.

Her bir eşitsizlik için işaret tablosunda satır ayrılır. Bu satırda o eşitsizlik için işaret incelemesi yapılır.

Tüm eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişim kümesi, sistemin çözüm kümesidir.

ÖRNEK

$$x - 2 \leq 0$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$2 \leq x^2 - x < 6$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$$\frac{x+2}{x-3} > 0$$

$$\frac{x-4}{x+1} \leq 0 \quad \text{eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$1 < \frac{x+1}{x-3} \leq 2$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$$\frac{x+4}{x^2+1} \leq 0$$

$x^2 \leq 2x$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Reel Köklerinin İşareti ve Varlığının İncelenmesi

$ax^2 + bx + c = 0$ ve $a \neq 0$ olmak üzere;

a) $\Delta > 0$ ise farklı 2 reel kök vardır. ($x_1 < x_2$ olsun)

I) $\frac{c}{a} > 0$ ise kökler aynı işaretlidir.

Eğer $-\frac{b}{a} > 0$ ise $0 < x_1 < x_2$

Eğer $-\frac{b}{a} < 0$ ise $x_1 < x_2 < 0$

2) $\frac{c}{a} < 0$ ise kökler ters işaretlidir.

Eğer $-\frac{b}{a} > 0$ ise $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| < |x_2|$

Eğer $-\frac{b}{a} < 0$ ise $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| > |x_2|$

3) $\frac{c}{a} = 0$ ise köklerden biri sıfırdır. ($x_1 = 0$ olsun)

Eğer $-\frac{b}{a} > 0$ ise $x_2 > 0$

Eğer $-\frac{b}{a} < 0$ ise $x_2 < 0$

b) $\Delta = 0$ ise eşit 2 kök vardır. ($x_1 = x_2$)

Eğer $-\frac{b}{a} > 0$ ise $0 < x_1 = x_2$

Eğer $-\frac{b}{a} < 0$ ise $x_1 = x_2 < 0$

Eğer $-\frac{b}{a} = 0$ ise $x_1 = x_2 = 0$

c) $\Delta < 0$ ise reel kök yoktur.

NOT

$x_1 < 0 < x_2$ ise Δ 'ya bakmaya gerek yoktur.

Sadece $x_1 x_2 < 0$ eşitsizliği çözülür.

ÖRNEK

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$x^2 + 4x + k - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 < 0 < x_2$ olduğuna göre;

k 'nin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$kx^2 - (k + 1)x + k - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < x_2$ olduğuna göre;

k 'nin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$x^2 + kx + k - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$0 < x_1 < x_2$ olduğuna göre;

k 'nin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$(k + 3)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ denkleminin reel köklerinin negatif olması için k 'nin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

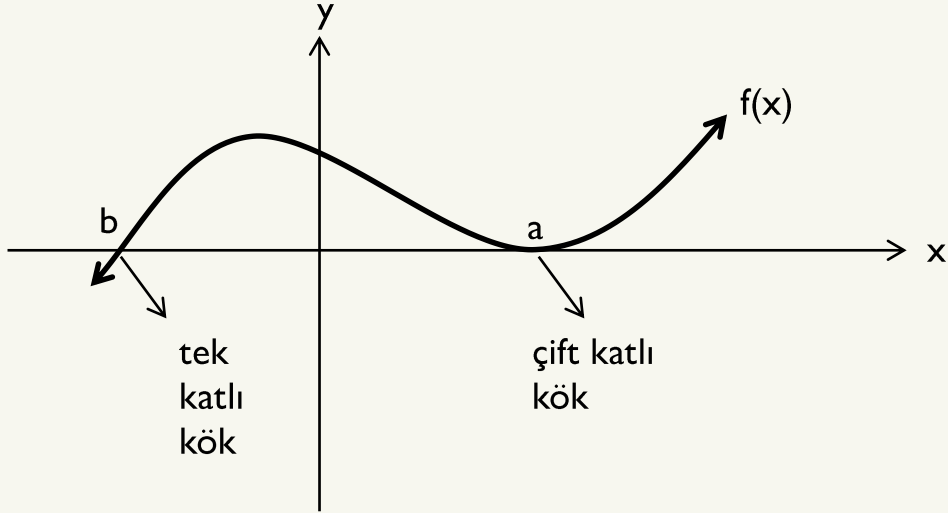
ÖRNEK

$x^2 + (k + 1)x + k - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir.

$\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} \geq 0$ olduğuna göre, k 'nin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

NOT

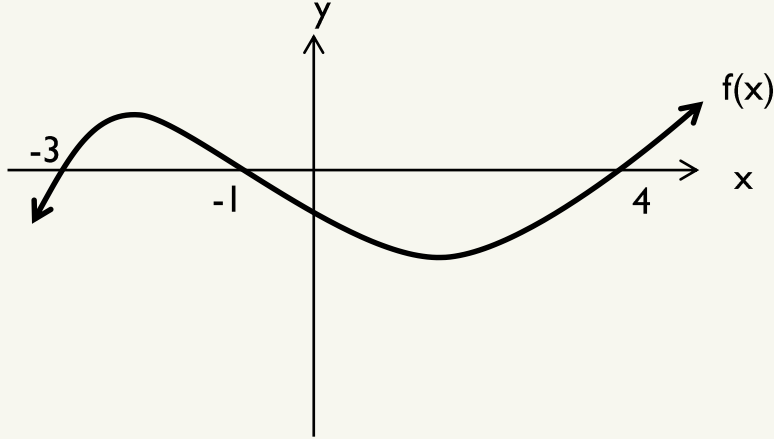
$f(x)$ 'in x eksenini kestiği noktalarda tek katlı kökü;
 $f(x)$ 'in x eksenine teğet olduğu noktalarda çift katlı kökü vardır.



ÖRNEK

Aşağıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

$\frac{(x - 3) \cdot f(x)}{x + 2} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.



ÖRNEK

Aşağıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;
 $(x + 1) \cdot f(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

