

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT I

I. DERECEDEN DENKLEMLER (BASİT EŞİTSİZLİK)

Aralarında $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ işaretleri bulunan reel sayılardan oluşan matematiksel önermelere **eşitsizlik** adı verilir.

$$a < b \rightarrow$$

$$a \leq b \rightarrow$$

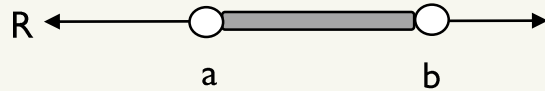
$$a > b \rightarrow$$

$$a \geq b \rightarrow$$

Reel Sayı Aralıkları

a) Açık Aralık :

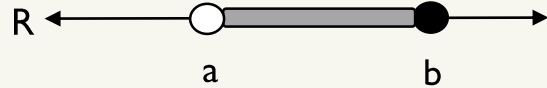
$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, a ve b sayılarının dahil olmadığı, a ile b arasında yer alan tüm reel sayıların oluşturduğu aralığa **açık aralık** denir ve (a,b) şeklinde gösterilir.



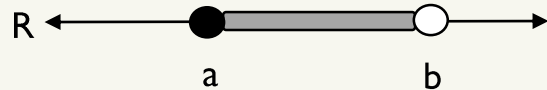
$$a < x < b \rightarrow (a,b)$$

b) Yarı Açık Aralık :

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, a veya b sayılarından yalnız birinin dahil olduğu ve a ile b arasında yer alan tüm reel sayıların oluşturduğu aralığa **yarı açık aralık** denir ve $(a,b]$ veya $[a,b)$ şeklinde iki farklı yarı açık aralık vardır.



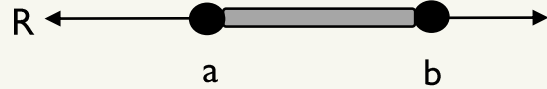
$$a < x \leq b \rightarrow (a,b]$$



$$a \leq x < b \rightarrow [a,b)$$

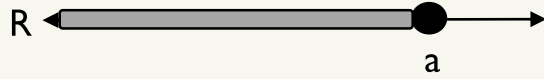
c) Kapalı Aralık :

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, a ve b 'nin de dahil olduğu, a ile b arasında yer alan tüm reel sayıların oluşturduğu aralığa **kapalı aralık** denir ve $[a,b]$ şeklinde gösterilir.

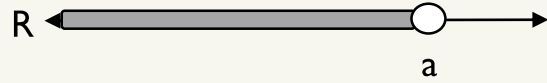


$$a \leq x \leq b \rightarrow [a,b]$$

Diğer Durumlar

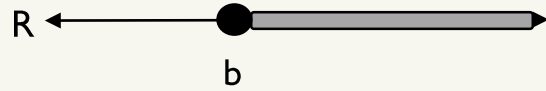


$$x \leq a \rightarrow (-\infty, a]$$

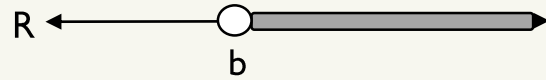


$$x < a \rightarrow (-\infty, a)$$

Diğer Durumlar



$$x \geq b \rightarrow [b, +\infty)$$



$$x > b \rightarrow (b, +\infty)$$

Eşitsizliğin Özellikleri

$a, b, x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

- I. Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı reel sayı eklenir ya da çıkarılırsa eşitsizlik bozulmaz, yön değiştirmez.

$a < b$ ise $a+x < b+x$ veya $a-x < b-x$ olur.

$a > b$ ise $a+x > b+x$ veya $a-x > b-x$ olur.

$6 < 8$ olmak üzere,

2. Bir eşitsizliğin her iki tarafı;

a) Pozitif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez.

$a < b$ ve $x > 0$ ise,

$-4 < 6$ olmak üzere,

$$a.x < b.x \text{ veya } \frac{a}{x} < \frac{b}{x}$$

$a > b$ ve $x > 0$ ise,

$$a.x > b.x \text{ veya } \frac{a}{x} > \frac{b}{x} \text{ olur.}$$

b) Negatif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

$a < b$ ve $x < 0$ ise,

$-3 < 5$ olmak üzere,

$a \cdot x > b \cdot x$ veya $\frac{a}{x} > \frac{b}{x}$ olur.

$a > b$ ve $x < 0$ ise,

$a \cdot x < b \cdot x$ veya $\frac{a}{x} < \frac{b}{x}$ olur.

3. Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.

$a < b$ ve $x < y$ ise, $a + x < b + y$ olur.

$a > b$ ve $x > y$ ise, $a + x > b + y$ olur.

$-3 < 4 < 6$ ve $1 < 4 < 9$ olmak üzere;

4. Her biri pozitif reel sayılar olmak üzere, aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa çarpılabilir.
 $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$a < b, x < y$ ise, $a.x < b.y$ olur.

$a > b, x > y$ ise, $a.x > b.y$ olur.

NOT: Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa çıkarılamaz ve bölünemez!

$4 < 7$ ve $-3 < 5$ olmak üzere,

5. Aynı işaretli reel sayılar sıralandığında, bu reel sayıların çarpmaya göre tersi alınırsa eşitsizlik yön değişir.

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } a < b \text{ ise } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ olur.}$$

$$4 < 9 \text{ ise}$$

$$-20 < -8 \text{ ise}$$

$$a, b \in \mathbb{R}^- \text{ ve } a < b \text{ ise } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ olur.}$$

$$-\frac{1}{5} < -\frac{1}{9} \text{ ise}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{11} \text{ ise}$$

b) Zıt işaretli reel sayılar sıralandığında, bu sayıların çarpmaya göre tersi alınırsa eşitsizlik yön değiştirmez.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$ ve $b > 0$ ise $a < b$ ve $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ dir.

$$-5 < 4 \text{ ise}$$

$$-\frac{1}{3} < \frac{1}{4} \text{ ise}$$

$$9 > -3 \text{ ise}$$

$$\frac{2}{5} > -\frac{3}{10} \text{ ise}$$

6. $a, b, x \in \mathbb{R}$ ve

$a < x, x < b$ ise $a < b$ olur.

$5 < 7$ ve $7 < 9$ ise

7. İki reel sayının çarpımı pozitif ise bu sayılar aynı işaretlidir.

a. $b > 0$ ise $a < 0$, $b < 0$ veya $a > 0$, $b > 0$ olur.

$3.a > 0$ ise

$(-20).b > 0$ ise

8. İki reel sayının çarpımı negatif ise bu sayıların işaretleri birbirinden farklıdır.

$a, b < 0$ ise $a < 0, b > 0$ veya $a > 0, b < 0$ olur.

$15.a < 0$ ise

$(-4).b < 0$ ise

9. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $0 < a < b < 1$ ise,

- $0 < a + b < 2$

- $0 < \frac{a}{b} < 1$

- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$

- $a \cdot b < 1$

- $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} > 1$

- $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \text{ ise}$$

10. Biri diğerinden büyük olan iki pozitif reel sayının pozitif tam sayı kuvvetleri alındığında eşitsizlik bozulmaz, yön değiştirmez.

$a, b \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$0 < a < b$ için $a^n < b^n$ olur.

$4 < 8$ olmak üzere,

11. Farklı iki negatif reel sayının;

a) Tek kuvveti alınırsa, eşitsizlik bozulmaz, yön değiştirmez.

$a, b \in \mathbb{R}^-$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$a < b < 0$ için $a^{2n-1} < b^{2n-1}$ olur.

$-5 < -3$ olmak üzere,

b) Çift kuvveti alınır, eşitsizlik yön değiştirir:

$a, b \in \mathbb{R}^-$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$a < b < 0$ için $a^{2n} > b^{2n}$ olur.

$-6 < -2$ olmak üzere,

12. Sıfır ile bir arasında yer alan bir reel sayının pozitif kuvvetleri kendisinden küçüktür.

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$0 < a < 1 \rightarrow 0 < a^{n+1} < a^n < a < 1$ olur.

13. -1 ile 0 (sıfır) arasındaki sayılarla 1 'den büyük sayıların pozitif kuvvetleri, kendisinden büyüktür.

$a \in \mathbb{R}^-$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 > -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$-1 < a < 0$ için $a^n > a$ olur.

$a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 > -\frac{1}{5} \rightarrow$$

$a > 1$ için $a^n > a$ olur.

$$5^3 > 5^2 \rightarrow$$

14. -1'den küçük reel sayıların pozitif çift kuvvetleri kendisinden büyük, pozitif tek kuvvetleri kendisinden küçüktür.

$a \in \mathbb{R}^-$ ve $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$a < -1$ için $a^{2n-1} < a$ veya

$a < -1$ için $a^{2n} > a$ olur.

$$(-3)^5 < (-3)^3 < (-3)$$

$$(-5)^4 > (-5)^2 > (-5)$$

ÖRNEK

$$a^5 \cdot b^2 < 0, \quad \frac{b^5}{c^7} < 0 \text{ ve } a \cdot c^3 > 0$$

olduğuna göre; a, b ve c'nin işaretlerini bulalım.

ÖRNEK

$-5 < x < 2$, $-4 < y < 6$ olduğuna göre,

A- x ve y reel sayılar olmak üzere;

- a) $3x - y$
- b) $x.y$
- c) $x^2 + y^2$

B- x ve y tam sayılar olmak üzere;

- a) $3x - y$ en büyük tam sayı değeri kaçtır?
- b) $x.y$ en küçük tam sayı değeri kaçtır?

ÖRNEK

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$a^2 < a$ ve $3b - |a - 6| = 0$ olduğuna göre, b yerine yazılabilecek tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

ÖRNEK

$1 < \frac{10}{1-x} < 5$ olduğuna göre, x 'in çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK

$$x - 2 \geq a$$

$$x + b \leq 5$$

eşitsizlik sistemini sağlayan x 'in alabileceği en geniş değer aralığı $[3,9]$ olduğuna göre, $a.b$ çarpımı kaçtır?

ÖRNEK

$$(0,999)^{3x-5} < (0,999)^{x+7}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı kaçtır?

ÖRNEK

$2^x = 5$, $3^y = 35$, $4^z = 15$ ifadesini sıralayınız.