

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT 2

DETERMINANT

$n \times n$ kare matrislerin kümesi K olmak üzere, K kümesinden reel sayılara tanımlı fonksiyona **determinant** denir ve $\det(A)$ veya $|A|$ ile gösterilir.

Determinant bir matrisin reel sayılar kümesindeki görüntüsüdür.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}_{1 \times 1} \quad \text{ise} \quad \det(A) = |A| = a_{11}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{ise} \quad \det(A) = |A| = a.d - b.c$$

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ise } \det(A) \text{ 'yı bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix} \text{ ise } \det(A) \text{ 'yı bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} x+2 & x \\ x+3 & x+1 \end{bmatrix} \quad \text{ise } \det(A) \text{ 'yı bulunuz.}$$

ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere;

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{vmatrix}$$

determinantının değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} x+3a & -2 \\ a+2 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{denkleminin bir kökü } -1 \text{ ise } a \text{ sayısını bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} \log_3 x & \log_{27} x \\ 6 & \log_x 81 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{ise } x \text{ sayısını bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} 2012 & 2010 \\ 2014 & 2011 \end{vmatrix}$$

determinantının değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} \sin 3x & \sin x \\ \cos 3x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{denklemini sağlayan } x \text{ dar açısını bulunuz.}$$

Minör ve Kofaktör (Eş Çarpan)

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

biçimindeki bir kare matrisin i. satır ile j. sütun atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir ve M_{ij} ile gösterilir.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

ifadesine ise a_{ij} elemanının kofaktörü (işaretli minör) denir.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor. Buna göre; M_{12} , M_{23} , M_{31} değerlerini bulunuz.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor. Buna göre; A_{21} , A_{13} , A_{32} değerlerini bulunuz.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinde a_{32} elemanının kofaktörü -5 ise a sayısını bulunuz.

$n \times n$ Türündeki Matrislerin Determinantı

Bir kare matrisin determinantını bulmanın temel yolu şöyledir:

Matrisin herhangi bir satır ya da sütununda bulunan elemanlar ile kofaktörlerinin çarpımının toplamı, bize kare matrisin determinantını verir.

Bu yöntemde 0'ın çok olduğu satırı veya sütunu seçmek işimizi daha kolaylaştıracaktır.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulunuz.

Sarrus Kuralı

3x3 türünde bir matrisin determinantını hesap etmenin bir yolu da Sarrus Kuralı'dır.

Bu kurala göre, matrisin ilk iki satırı 4. ve 5. satır olarak tekrar yazılır ya da ilk iki sütunu 4. ve 5. sütun olarak yanına yazılarak köşegenler çarpılır. Farklı köşegenlerin çarpımları toplanır ve en sonunda bu iki toplamın farkı determinantı verir.

İlk iki satır alta yazılırsa,

$$|A| = \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \end{array}$$

Diagram illustrating the Sarrus rule for a 3x3 matrix. The matrix is written with its first two rows repeated below it. Arrows indicate the paths for calculating the determinant: three downward arrows on the left (negative signs) and three upward arrows on the right (positive signs).

İlk iki sütun yan tarafa yazılarak da yapılabilir.

(+) işaretler toplanır, (-) işaretler toplanır ve toplamlar çıkartılırsa determinant bulunur.

ÖRNEK

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

- A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -6

LYS 2010

Determinantın Özellikleri

1) $|A|=|A^T|$

2) Bir matrisin herhangi iki satırı ya da herhangi iki sütunu orantılı ise determinant 0'dır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

3) Bir matrisin herhangi bir satırının ya da sütununun tüm elemanları 0 ise determinant da 0'dır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

4) A , $n \times n$ tipinde bir matris ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\det(k.A) = k^n \cdot \det A$ 'dır.

5) Bir determinantın iki satırı ya da iki sütunu aralarında yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} m & n & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

6) Bir determinantın bir satırı ya da bir sütunu bir k skaler sayısı ile çarpılırsa determinantı da k katına çıkar.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kx & ky & kz \\ d & e & f \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

7) Bir determinanttta herhangi bir satırın tüm elemanları k ile çarpılıp başka bir satıra ya da sütuna eklenirse determinantın değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x+ka & y+kb & z+kc \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

8) Bir determinantın bir satırı ya da sütunu iki terim toplamından oluşuyor ise bu matrisin determinanı ayrı ayrı oluşan determinantların toplamına eşittir.

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ m & n & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & k \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & k \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

9) A ve B aynı dereceden kare matrisler olmak üzere, $|A.B| = |A|.|B|$ dir.

$$10) |A^n| = |A|^n$$

$$11) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{olduğuna göre, } \det(A.B) \text{ yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $\det(A^4)$ ü bulunuz.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $\det(A^{-1})$ i bulunuz.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ veriliyor. } |A| + |A^T| = 2 \text{ olduğuna göre } x\text{'i bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \text{ olduğuna göre, } \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \text{ determinantının değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ve $\det(A) = 2$ olduğuna göre $\det(3A)$ yı bulunuz.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $\det(2.A.A^T)$ u bulunuz.

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} \text{ determinantının değerini bulunuz.}$$

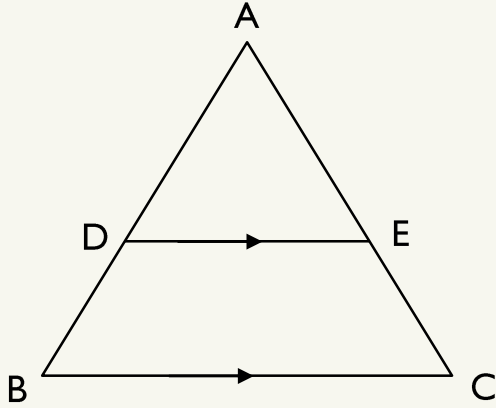
ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} 18 & 19 & 20 \\ 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 \end{vmatrix} \text{ determinantının değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & 4 & 5 \end{vmatrix} = 18 \text{ olduğuna göre, } \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y+3 & 2 & 3 \\ z+2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ determinantının değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK



$[DE] \parallel [BC]$ olmak üzere

$$|AD| = x, |AE| = y, |AB| = c$$

$$|AC| = b, |BC| = a, |DE| = z$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2014 & 2015 & 2016 \\ c & b & a \end{vmatrix} \text{ determinantının değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} -b & b & b \\ a & a & a \\ c & c & -c \end{vmatrix}$$

determinantının değerini bulunuz.

Ek Matris

$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times m}$ matrisi m . dereceden bir kare matris olsun. A matrisinin kofaktörlerinin oluşturduğu matris olan $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times m}$ matrisinin transpozuna ek matris denir. ve $Ek(A)$ biçiminde gösterilir.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Ek Matrisin Özellikleri

$$1) \text{Ek}(A) \cdot A = A \cdot \text{Ek}(A) = |A| \cdot I$$

$$2) A^{-1} = \frac{\text{Ek}(A)}{\det(A)}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $\text{Ek}(A)$ yı bulunuz.

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ iken } Ek(A) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre, } k\text{'yi bulunuz.}$$