

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT 2

DİZİLER

Tanım kümesi sayma sayıları olan fonksiyona **dizi** denir.

A kümesi boş kümeden farklı olmak şartıyla,
 $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow A$ ile gösterilir.

Eğer $A = \mathbb{R}$ olursa

$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ reel sayı dizisi denir.

$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ sayma sayısı dizisidir.

NOT:

Dizi olan fonksiyonlar $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için tanımlı olmalıdır.

$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olan dizide

$n = 1, 2, 3, \dots, n$ verilerek

$f(1) \rightarrow a_1$ dizisinin birinci terimi

$f(2) \rightarrow a_2$ dizisinin ikinci terimi

$\cdot$ $\cdot$

$\cdot$ $\cdot$

$\cdot$ $\cdot$

$f(n) \rightarrow a_n$ dizisinin n . terimi bulunur.

a_n dizinin genel terimidir.

Böylece $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ dizisi elde edilir.

Örneğin,

$f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(n) = n^2 - 1$ olsun.

Dizinin terimleri

$(f(1), f(2), \dots, f(n), \dots)$

$(0, 3, 8, \dots, (n^2 - 1), \dots)$ olur.

NOT:

- 1) Diziler genel terimi ile bellidir. Dizinin bazı terimleri verilip genel terimi bulunamaz.
- 2) Genel terimi tanımsız yapan en az bir pozitif doğal sayı değeri varsa, bu genel terim dizi belirtmez.

ÖRNEK:

Aşağıdakilerden hangisi bir dizinin genel terimi olamaz?

a) $(a_n) = (2n + 5)$

b) $(b_n) = (\tan 5n)$

c) $(c_n) = \left(\frac{2n+3}{3n+5}\right)$

d) $(d_n) = \left(\frac{3n-1}{2n-8}\right)$

e) $(e_n) = \log(4 - n)$

f) $(f_n) = \left(\frac{3}{n^2 - 4n + 4}\right)$

ÖRNEK:

$(a_n) = n^2 + 2$ ise $\frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK:

$$(a_n) = \begin{cases} (-1)^{n+1}, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 2n+5, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 1-2n, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

olduğuna göre $a_5 + a_{13} + a_{27}$ toplamının sonucunu bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{3n-2}{5n+4} \right)$ dizisinin kaçınıcı teriminin $\frac{17}{32}$ olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{2n+1}{4n-3} \right)$ dizisinin $\frac{7}{13}$ teriminden sonraki terimini bulunuz.

ÖRNEK:

Her $n > 1$ için;

$a_1 = 2$ ve $a_n = 3 + a_{n-1}$ olduğuna göre a_{25} 'i bulunuz.

ÖRNEK:

Her $n \geq 1$ için;

$a_1 = 1$ ve $a_n = 3n + a_{n+1}$ olduğuna göre a_{10} ' u bulunuz.

ÖRNEK:

Her $n \geq 1$ için;

$a_1 = 4$ ve $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ olduğuna göre a_n dizisinin genel terimini bulunuz.

ÖRNEK:

$a_n = \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)} \right)$ olduğuna göre a_{15} 'i bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{1}{n^2+5n+6} \right)$ dizisinin ilk 5 terim toplamını bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \log_{(n+1)} (n+2)$ dizisinin ilk 62 terim çarpımını bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = (n^2 - 2n - 15)$ dizisinin kaç teriminin negatif olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{n^2 - n - 6}{13 - 2n} \right)$ dizisinin kaç teriminin negatif olmadığını bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{n+7}{n+1} \right)$ dizisinin kaç teriminin tam sayı olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{3n+66}{n+2} \right)$ dizisinin kaç teriminin tam sayı olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{n+3}{2n+21} \right)$ dizisinin kaç teriminin $\frac{1}{3}$ ' ten küçük olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{2}{3n+4} \right)$ dizisinin kaç teriminin $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10} \right)$ aralığında olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = (n^2 - 6n + 3)$ dizisinin en küçük terimini bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = (-n^2 - 4n + 2)$ dizisinin en büyük terimini bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = (2n^2 - 9n + 1)$ dizisinin en küçük terimini bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = (n^2 + 4n + 5)$ dizisinin en küçük terimini bulunuz.

Sabit Dizi

Tüm terimleri birbirine eşit olan diziye **sabit dizi** denir.

- “ a_n dizisi sabit dizi ise n ‘ye bağlı terim olmamalıdır.”
- $(a_n) = \left(\frac{xn+y}{kn+t}\right)$ dizisi sabit dizi ise $\frac{x}{k} = \frac{y}{t}$ olmalıdır.

ÖRNEK:

$(a_n) = (k-1)n^2 + (p-3).n + 2k + p$ dizisi sabit dizi olduğuna göre, bu dizinin 10. terimini bulunuz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{3n+5}{6+kn} \right)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre k sayısını bulunuz.

EŞİT DİZİLER

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ile (b_n) dizileri eşittir denir. Bu durum $(a_n) = (b_n)$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK:

Genel terimleri $(a_n) = (\cos n \pi)$ ve $(b_n) = (-1)^n$ olan dizilerin eşit olup olmadığını inceleyiniz.

DİZİLER KÜMESİNDE İŞLEMLER

$$(a_n \pm b_n) = (a_n) \pm (b_n)$$

$$(a_n \cdot b_n) = (a_n) \cdot (b_n)$$

$$(a_n : b_n) = \frac{(a_n)}{(b_n)}, (b_n \neq 0)$$

$k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n)$ biçiminde tanımlanır.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$, $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizileri için $(a_n) \cdot (b_n)$, $\frac{(b_n)}{(a_n)}$ ve $3(a_n)$ dizilerini bulunuz.

ÖRNEK:

$$(a_n) = \begin{cases} n+2, & n > 2 \\ 2n+1, & n \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{ve } (b_n) = \begin{cases} 3n-2, & n < 5 \\ n, & n \geq 5 \end{cases}$$

dizileri veriliyor. Buna göre $(a_n) + (b_n)$ dizisinin genel terimini bulunuz.

MONOTON DİZİLER

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için,

$a_n < a_{n+1} \iff (a_n) \text{ monoton artandır.}$

$a_n > a_{n+1} \iff (a_n) \text{ monoton azalandır.}$

$a_n \leq a_{n+1} \iff (a_n) \text{ azalmayandır.}$

$a_n \geq a_{n+1} \iff (a_n) \text{ artmayandır.}$

NOT:

“azalmayandır.” kelimesinin anlamının “artar veya aynen kalır.”

“artmayandır.” kelimesinin anlamının “azalır veya aynen kalır.” olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{1}{n} \right)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

NOT:

a, b, c, d reel sayılar olmak üzere; genel terimi $(m_n) = \left(\frac{an+b}{cn+d} \right)$ biçiminde olan diziler için,

- 1) Paydanın kökü olan $\frac{-d}{c} > 1$ ise (m_n) monoton değildir.
- 2) $\frac{-d}{c} < 1$ ise dizi monotondur.
a.d – b.c > 0 artan
a.d – b.c < 0 azalan
- 3) a.d – b.c = 0 ise dizi sabittir.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{n-1}{2n+3} \right)$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{n+1}{3n+1} \right)$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{2n+3}{3n-5} \right)$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

ÖRNEK:

$(a_n) = \left(\frac{4n+7}{2n-7} \right)$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

NOT:

$a_n > 0$ olduğunda $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise $a_{n+1} > a_n$ olur. Dolayısıyla (a_n) monoton artandır.

Eğer $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ise $a_{n+1} < a_n$ olur, ki bu da (a_n) dizisinin monoton azalan olduğunu gösterir.

ÖRNEK:

Genel terimi $(a_n) = \frac{2^n}{(n+1)!}$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

NOT:

$\left(\frac{an+b}{cn+d} \right)$ dizisi için $\frac{-d}{c} > 1$ olsun. $\frac{-d}{c}$ 'nin solundaki en büyük tam sayı p ise a_p ve a_{p+1} sayılarından biri dizinin en büyük elemanı, biri de en küçük elemanıdır.

Dizi monoton artan ise a_1 dizinin en küçük elemanı olup en büyük elemanı yoktur. Dizi monoton azalan ise a_1 dizinin en büyük elemanı olup en küçük elemanı yoktur.

ÖRNEK:

$\left(\frac{2n}{4n-17} \right)$ dizisinin en büyük ve en küçük terimini bulunuz.

ÖRNEK:

$\left(\frac{3n}{3n+4} \right)$ dizisinin eğer varsa en büyük ve en küçük terimini bulunuz.

NOT:

$(an^2 + bn + c)$ genel terimiyle verilen dizinin monotonluğunu incelerken,

- $\frac{-b}{2a} < \frac{3}{2}$ ise $(an^2 + bn + c)$ monotondur.

$a > 0$ ise monoton artan,

$a < 0$ ise monoton azalandır.

- $\frac{-b}{2a} > \frac{3}{2}$ ise $(an^2 + bn + c)$ monoton değildir.

- $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$ ise $(an^2 + bn + c)$ artmayan veya azalmayandır.

$a > 0$ ise azalmayan, $a < 0$ ise artmayandır.

ÖRNEK:

$(2n^2 - 3n - 4)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

ÖRNEK:

$(a_n) = (8n - n^2)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

ÖRNEK:

$(a_n) = (5n^2 + bn + 1)$ dizisinin monoton artan olması için b ne olmalıdır?

Aritmetik Diziler

Ardışık terimleri arasındaki farkın eşit olduğu dizilerdir.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = r = \text{ortak fark}$$

Özellikler

- 1) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ veya $a_n = a_p + (n-p) \cdot r$
2) Bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin toplamaları eşittir.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{18}, a_{19}, a_{20}$ olsun.

$$a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18} = \dots$$

- 3) Bir terim, kendisinden eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasıdır.

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \quad a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

- 4) İlk n terim toplamı S_n olmak üzere,

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \text{ veya } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot r)$$

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_1 = 3$ ve $r = \frac{5}{2}$ ise a_{17} 'yi bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_5 = 18$ ve $a_8 = 24$ ise a_2 'yi bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_1 = 3$ ve $r = 2$ ise kaçınıcı terimin 39 olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $\frac{a_3+a_{10}+a_{17}}{a_5+a_{15}}$ oranını bulunuz.

ÖRNEK:

$2x + 1$, $10 - x$, $6x - 1$ bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi ise x 'i bulunuz.

ÖRNEK:

$2\cos^4x$, y , $-2\sin^4x$ bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi ise y 'yi bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_{12} - a_5 = 14$ ve $a_5 + a_1 = 10$ ise a_{15} 'i bulunuz.

ÖRNEK:

$a_3 = 4$ ve $a_9 = 7$ olan aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_2 + a_5 + a_8 = 18$ ve $a_4 + a_2 = -2$ ise ortak fark olan r 'yi bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_8^2 - a_6^2 = 48$ ve $a_7 = 3$ ise a_6 'yı bulunuz.

ÖRNEK:

3 ile 120 arasında aritmetik dizi olacak şekilde 38 tane terim yazılıyor. Oluşan bu dizinin 10 terimini bulunuz.

ÖRNEK:

Konveks bir çokgenin iç açıları, bir aritmetik dizinin ardışık dört terimidir. En küçük açı 30 derece ise en büyük açiyı bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_x = y$ ve $a_y = x$ ise a_8 'i bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_1 = 4$ ve $a_7 = 22$ 'dir. $a_{x+10} + a_{x-5} = 65$ ise x 'i bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_x = y$ ve $a_y = x$ ve $x + y = 16$ ise a_1 'i bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_3 = 4$ ve $r = 3$ ise S_{13} 'ü bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $a_{10} - a_5 = 20$ ve $a_3 = 5$ ise S_7 'yi bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $S_n = n^2 + n$ ise a_{10} 'u bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $S_{16} - S_{15} = a + b$, $S_8 - S_7 = a - 4b$ ve $r = 5$ ise b 'yi bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $S_n = 3n^2 + 2n$ ise aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.

ÖRNEK:

–9 ile 19 arasına aritmetik dizi olacak şekilde 10 terim yazılıyor. Bu 10 terimin toplamını bulunuz.

ÖRNEK:

Bir aritmetik dizide $S_{20} - S_{10} = 45$ ve $a_1 = 1$ ise a_{30} 'u bulunuz.

Geometrik Diziler

Ardışık 2 terim arasındaki oranın eşit olduğu dizidir.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r = \text{ortak çarpan}$$

Özellikler

- 1) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ veya $a_n = a_p \cdot r^{n-p}$
- 2) Bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin çarpımı eşittir.
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{18}, a_{19}, a_{20}$ olsun.
 $a_1 \cdot a_{20} = a_2 \cdot a_{19} = a_3 \cdot a_{18} = \dots$
- 3) Bir terim kendisinden eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasına eşittir.

$$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_2^2 &= a_1 \cdot a_3 \\ a_3^2 &= a_1 \cdot a_5 = a_2 \cdot a_4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

- 4) İlk n terim toplamı,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_{10} = \frac{4}{128}$ ve $r = \frac{1}{2}$ ise a_4 'ü bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_4 = 24$ ve $a_9 = 768$ ise a_1 'i bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_8 = 2^5$ ve $a_6 = 2^7$ ise geometrik dizinin genel terimini bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_6 = x$ ve $a_{11} = y$ ise a_{51} 'i bulunuz.

ÖRNEK:

$$x \in \mathbb{Z}^+$$

$\log_9 25$, x , $\log_5 81$ sayıları bir geometrik dizinin ardışık üç terimi ise x 'i bulunuz.

ÖRNEK:

İlk 7 terim çarpımı 3^7 olan bir geometrik dizide a_4 'ü bulunuz.

ÖRNEK:

3 ile $\frac{16}{3}$ arasına yerleştirilecek 3 sayı ile geometrik dizi oluşturuluyor. Dizinin ortak çarpanını bulunuz.

ÖRNEK:

2 ile 16 arasına geometrik dizi olacak şekilde 20 sayı yazılırsa a_8 'i bulunuz.

ÖRNEK:

$r = 2$ olan bir geometrik dizide $\sum_{n=1}^4 \frac{1}{a_n} = \frac{1}{16}$ ise a_1 'i bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizinin 10. terimi 1 'dir. Baştan en az kaç terimin çarpımının 1 olduğunu bulunuz. ($r \neq 1$)

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_5 + a_6 = 6$ ve $a_1 + a_2 = 96$ ise a_8 'i bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_1 + a_4 = 21$ ve $a_2 + a_3 = 18$ ise ortak çarpanın alacağı değerler çarpımını bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $r = 2$ ise S_6 'yı bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $a_1 = 2$, $r = 2$ ve $S_n = 254$ olduğuna göre n 'yi bulunuz.

ÖRNEK:

İlk 6 terim toplamı ilk 3 terim toplamının -7 katı olan bir geometrik dizinin ortak çarpanını bulunuz.

ÖRNEK:

Bir geometrik dizide $S_n = 121$, $a_1 = 1$ ve $a_n = 81$ olduğuna göre n 'yi bulunuz.

NOT:

Bir dizinin terimleri, hem aritmetik dizinin hem de geometrik dizinin terimleriye bu dizi sabit dizidir.

ÖRNEK:

$a, b \in \mathbb{R}^+$

a^2b^2 , $2ab^2$, $3(a + b^2)$ sayıları hem aritmetik hem de geometrik bir dizinin ardışık üç terimi ise b 'yi bulunuz.