

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT 2

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

Katsayılar reel sayı olmak üzere,

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x + a_{m2}y = b_m$$

denklem sistemine **iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A \cdot x = B$ biçiminde

$$\begin{array}{c} \text{Katsayılar matrisi} \leftarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \nearrow \text{Cevaplar matrisi} \\ \text{matris çarpımı olarak yazılır.} \end{array} \\ \downarrow \\ \text{Bilinmeyenler matrisi} \end{array}$$

ÖRNEK: $3x - 4y = 5$

$2x + y = 1$ denklem sistemini matris çarpımı olarak yazın.

ÖRNEK:

$$x + 2y - 3z = 7$$

$$-x - 2y + 4z = -16$$

$$2x + 5y - z = 23$$

denklem sistemini matris çarpımı olarak yazınız.

Doğrusal (Lineer) Denklem Sistemleri

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ ve b_1 birer reel sayı olmak üzere,
 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ biçimindeki denkleme **doğrusal denklem** denir.

Doğrusal denklemlerden oluşan,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$ biçimindeki sistemlere **doğrusal denklem sistemi** denir.
Sistemdeki her denklemi sağlayan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sıralı n 'lidir.

Doğrusal denklem sisteminin çözümü yapılırken;

- Sistemde iki denklemin yer değiştirmesi
- Sistemdeki bir denklemin sıfırdan farklı bir reel sayı ile çarpılması
- Sistemdeki bir denklemin sıfırdan farklı bir katının sistemdeki başka bir denkleme eklenmesi biçiminde temel satır işlemlerini kullanırız.

ÖRNEK:

$$2x + y - 2z = 17$$

$$x - 2y + z = 0$$

$-x + 3y + 2z = 11$ denklem sisteminin çözümünü temel satır işlemleri ile bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 17 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{2. satırın } -2 \text{ katını 1. satıra, 2. satırın 1 katını 3. satıra} \\ \text{ekleyelim.} \end{array}$$

Temel satır işlemi yapılırken, üzerinde işlem yapılan satırın aynı kaldığına dikkat delim.

$$\left. \begin{array}{l} 5y - 4z = 17 \\ x - 2y + z = 0 \\ y + 3z = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{1. satır ile 2. satırı yer değiştirelim.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 5y - 4z = 17 \\ y + 3z = 11 \end{array} \right\} \text{ 3. satırın } -5 \text{ katını 2. satıra ekleyelim.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ -19z = -38 \\ y + 3z = 11 \end{array} \right\} \text{ Bu durumda}$$

$$-19z = -38 \quad y + 3z = 11 \quad x - 2y + z = 0$$

$$z = 2$$

$$y = 5$$

$$x = 8 \text{ olarak bulunur.}$$

NOT:

Lineer denklem sistemlerinin çözümleri yapılırken;

- Gauss yok etme yöntemi
- Gauss – Jordan yok etme yöntemi
- Cramer yöntemi
- Ters matris yöntemi kullanılır.

Gauss Yok Etme Yöntemi

Verilen denklem sistemini $A \cdot x = B$ matris çarpımı biçiminde yazdıktan sonra temel satır işlemleri yapılarak A matrisi üst üçgensel veya alt üçgensel matrise dönüştürülür. Yani;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Üst üçgensel matris haline getirilip sırasıyla $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ bilinmeyenleri bulunur.

ÖRNEK:

$$x + y - 2z = 3$$

$$2x - y + z = 5$$

$x + y - 3z = 2$ denklem sisteminin çözümünü Gauss yok etme yöntemi ile bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. satırın -2 katını 2. satıra, 1. satırın -1 katını 3. satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. satırı $\frac{-1}{3}$ ile, 3. satırı -1 ile çarpalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Buradan,

$$x + y - 2z = 3$$

$$y - \frac{5z}{3} = \frac{1}{3}$$

$z = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 3$ denklem sisteminin çözümü elde edilir.

Gauss – Jordan Yok Etme Yöntemi

Verilen denklem sistemini $A \cdot x = B$ matris çarpımı biçiminde yazdıktan sonra temel satır işlemleri uygulanarak A matrisinin 1. köşegenindeki elemanları 1, diğer elemanları 0 olacak biçimde gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Gerekli temel satır işlemleri yapılarak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

elde edilip x, y, z bulunur.

Cramer Yöntemi

Verilen denklem sisteminde $A \cdot x = B$ matris çarpımı biçiminde yazdıktan sonra katsayılar determinantı oluşturulur. Yani;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$
$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & b_n \end{vmatrix} \quad \text{olsun.}$$

Bu durumda,

1. $\Delta \neq 0$ ise sistemin çözüm kümesi bir elemanlıdır.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

2. $\Delta = 0$ ve $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 'lerden en az biri sıfırdan farklı ise çözüm yoktur.

3. $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ ise çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

ÖRNEK:

$$x - 2y + z = 3$$

$$x + y - z = 0$$

$$-x + y + z = 4 \text{ denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.}$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Burada Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 determinantlarında verilen determinantın indis numarası ne ise oradaki sütuna verilen sonuç matrisinin yazıldığına dikkat edelim.

Eğer verilen determinantlar Sarrus Kuralı ile hesaplanırsa,

$$\Delta = 4 \quad \Delta_1 = 10 \quad \Delta_2 = 8 \quad \Delta_3 = 18 \text{ elde edilir.}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x = \frac{5}{2} \quad y = 2 \quad z = \frac{9}{2}$$

UYARI:

A karesel bir matris olmak üzere; $A \cdot x = B$ denklem sisteminde B matrisi sıfır matrisi olursa denklem $A \cdot x = 0$ halini alır ve bu denkleme **homojen denklem** denir.

Bu denklemde çözüm kümesi bir elemanlıdır.

$|A| \neq 0$ ise çözüm tektir.

$|A| = 0$ ise çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

ÖRNEK:

$$2x + 3ay = 0$$

$3x - 9by = 0$ denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması için a ile b arasındaki bağıntıyı bulunuz.

ÖRNEK:

$$x + 2y + z = 0$$

$$x + 3y + 3z = 0$$

$x + ay - z = 0$ homojen denklem sisteminde çözüm kümesinin bir elemanlı olabilmesi için a hangi değeri alamaz?

ÇÖZÜM:

Çözüm kümesinin bir elemanlı olabilmesi için $\Delta \neq 0$ olmalıdır. O halde $\Delta = 0$ yapan değer bizden istenendir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Sarrus yöntemi ile,

$$-2a + 2 = 0$$

$$2a = 2$$

$$a = 1 \text{ olamaz.}$$

Ters Matris Yöntemi

Verilen denklem sistemi

$A \cdot x = B$ matris çarpımı biçiminde yazılır.

$$A \cdot x = B$$

Verilen eşitlikte her iki tarafı A matrisinin çarpma işlemine göre tersi olan A^{-1} matrisi ile soldan çarparsak,

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\text{Birim matris}} \cdot x = A^{-1} \cdot B$$

Birim matris

$$x = A^{-1} \cdot B \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK:

$$2x + 3y = 5$$

$5x + 8y = 11$ denklem sisteminin çözümünü ters matris yöntemiyle bulunuz.