

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT I

FONKSİYON

I. Fonksiyonun Tanımı

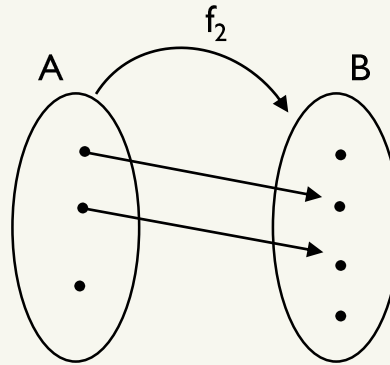
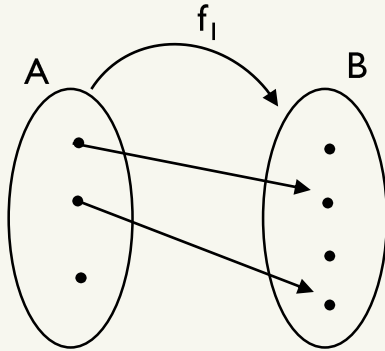
A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, A'dan B'ye bir f bağıntısı verilmiş olsun. A'nın her elemanı B 'nin elemanlarıyla en az bir kez ve en çok bir kez eşleniyorsa bu f bağıntısına A'dan B'ye bir fonksiyondur denir ve

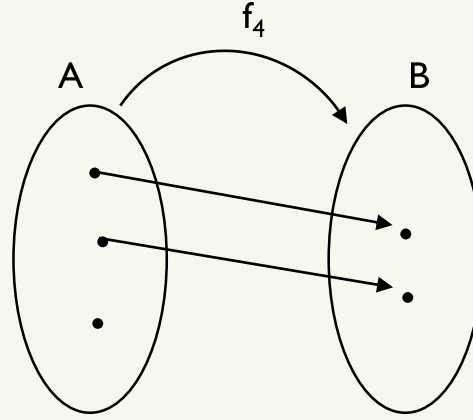
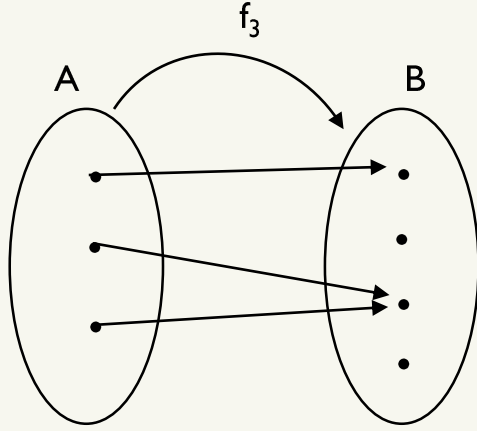
$f : A \longrightarrow B$ ya da $A \xrightarrow{f} B$ biçiminde gösterilir.

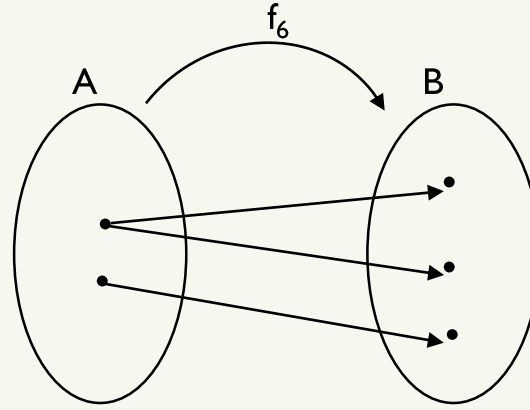
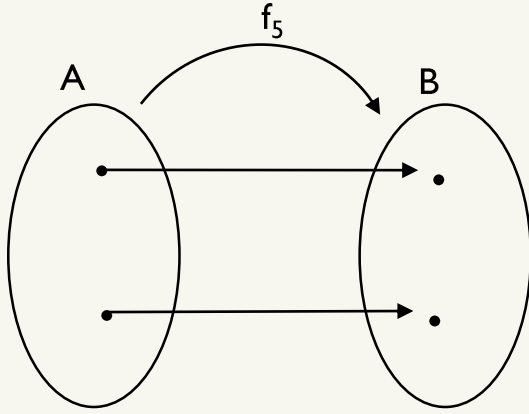
- Burada A'ya tanım kümesi, B'ye değer kümesi denir.
- Tanım kümesindeki bir x elemanı, değer kümesindeki bir y elemanına bağlı ise, bu $f(x) = y$ ile gösterilir.
- A'nın elemanlarının B'deki görüntülerinin kümesine görüntü kümesi denir.
- Her fonksiyon bir bağıntıdır. Fakat her bağıntı bir fonksiyon olmayabilir.

$f: A \longrightarrow B$, f bir fonksiyon ise,

- 1) Tanım kümesinde açıkta eleman kalmaz, ancak değer kümesinde açıkta eleman kalabilir.
- 2) Tanım kümesinde bir eleman, değer kümesindeki birden fazla elemanla eşlenemez. Fakat tanım kümesindeki birden fazla eleman, değer kümesindeki bir elemanla eşlenebilir.







ÖRNEK

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f : x \longrightarrow 2x - 4$ bağıntısı fonksiyon mudur?

ÖRNEK

Doğal sayılar kümesinde ($\mathbb{N}$ 'de) tanımlı, $f : x \longrightarrow 2x + 5$ bağıntısının fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

ÖRNEK

Aşağıdakilerden hangisi fonksiyon değildir?

A) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ve $f(x) = 3x + 5$

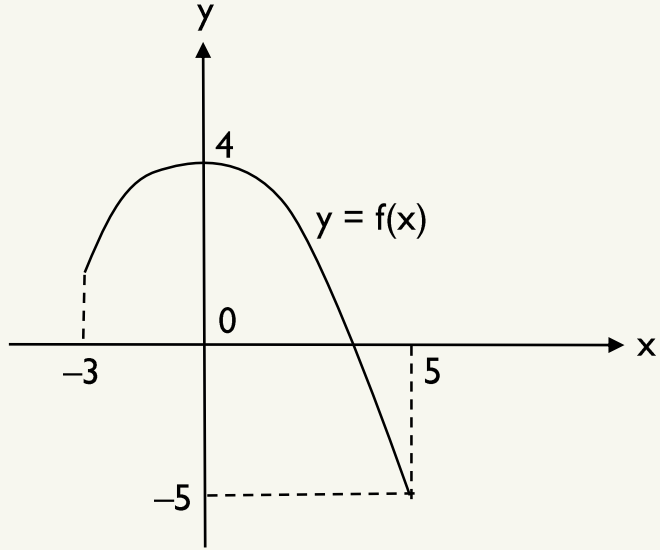
B) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ve $f(x) = x + 4$

C) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x^2 + 4$

D) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ve $f(x) = \sqrt{x}$

E) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \sqrt[3]{x}$

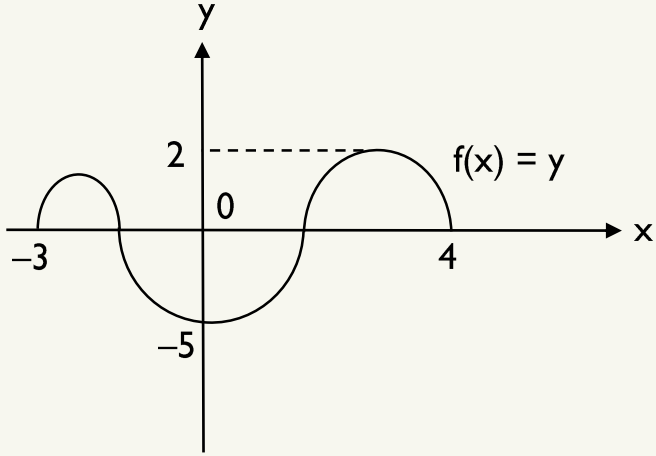
ÖRNEK



Tanım Kümesi:

Görüntü Kümesi:

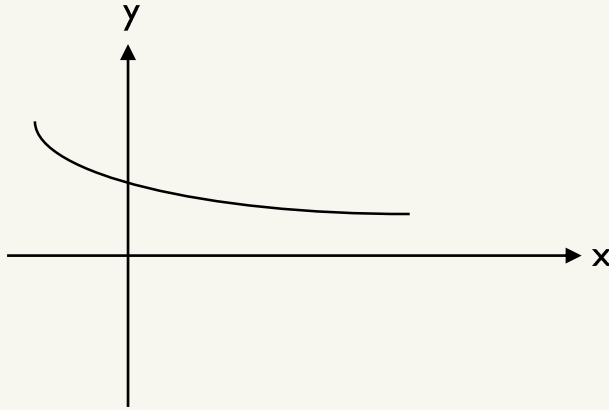
ÖRNEK



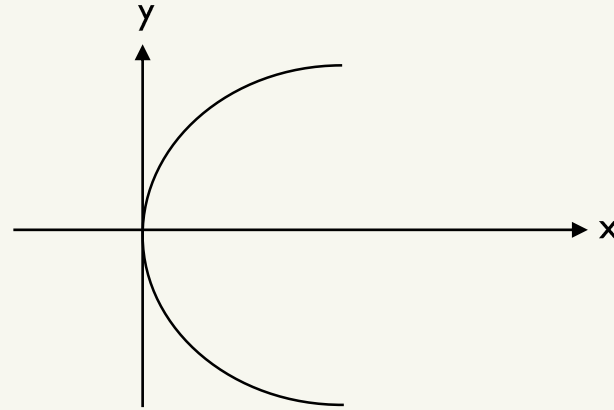
Tanım Kümesi:

Görüntü Kümesi:

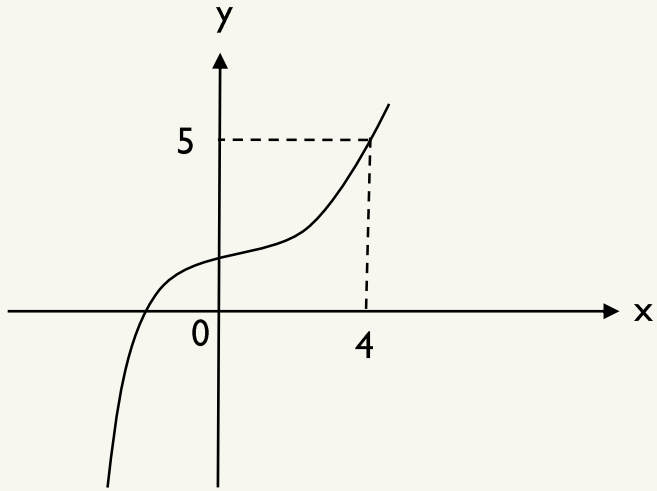
UYARI: Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını anlamak için, tanım kümesi üzerinden değer kümesine paraleller çizilir. Bu paraleller eğriyi en az bir, en çok bir noktada kesiyorsa bağıntı fonksiyondur.



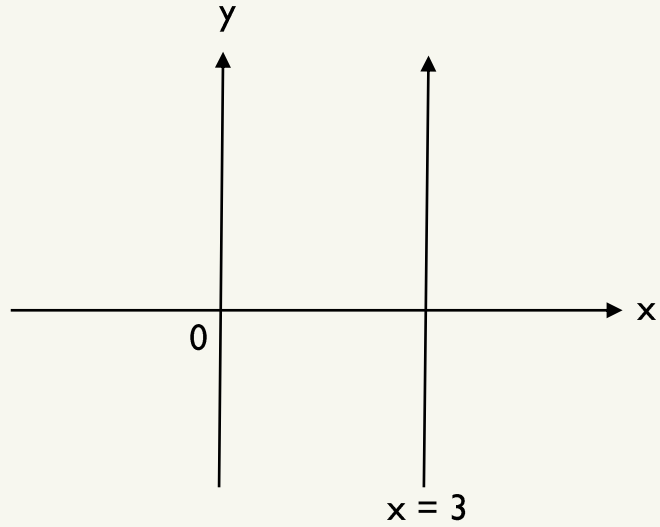
$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

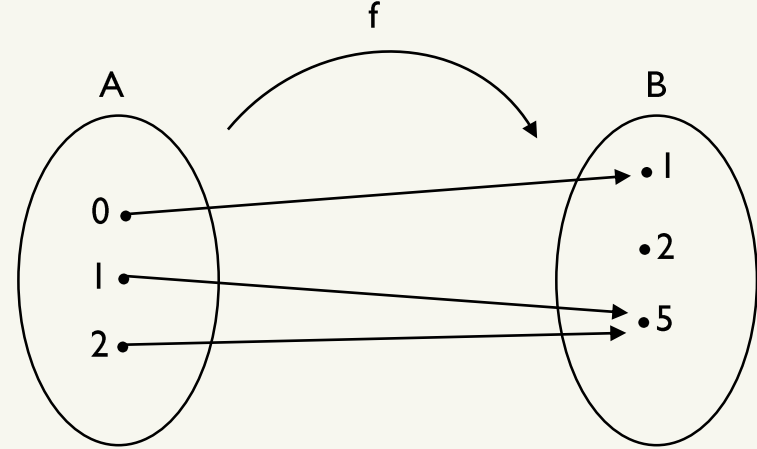
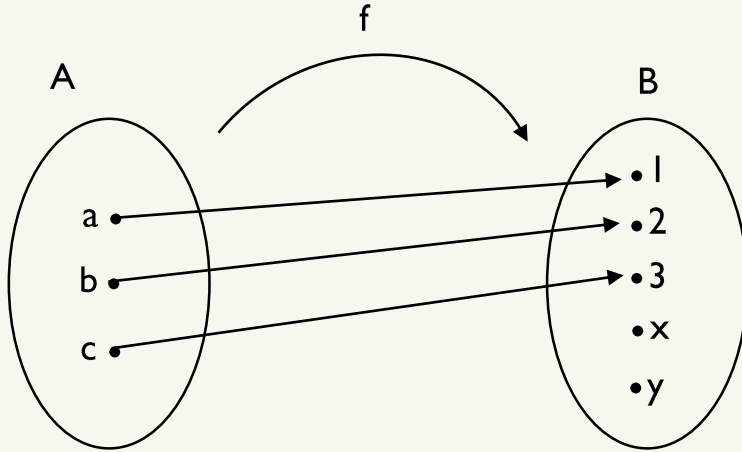


$$f: \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

2. Fonksiyon Çeşitleri

A) Birebir Fonksiyon

f fonksiyonu, tanım kümesindeki her elemanı, değer kümesindeki farklı bir elemanla eşleştiriyorsa buna **birebir fonksiyon** denir.

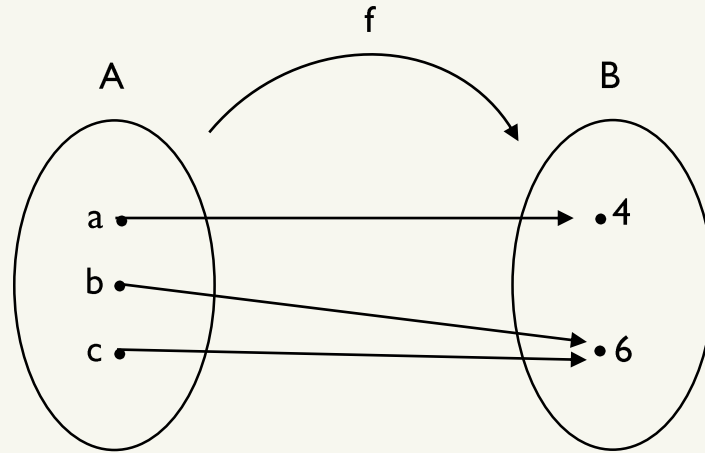
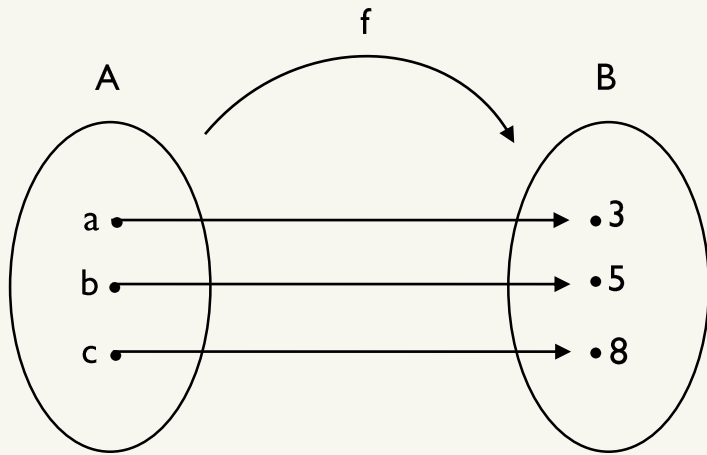


UYARI: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa, f fonksiyonu birebirdir.

UYARI: Grafiği verilen bir fonksiyonun birebir olup olmadığını anlamak için x eksenine paralel doğrular çizilir. Bu paralel doğrular grafiği bir noktada kesiyorsa, fonksiyon birebirdir. Birden fazla noktada kesiyorsa birebir değildir.

B) Örten Fonksiyon

f , A 'dan B 'ye tanımlanan bir fonksiyon olsun. $f(A) = B$ ise, kısacası görüntü kümesi değer kümesine eşit ise, f 'ye örten fonksiyon denir.



C) İçine Fonksiyon

Örten olmayan fonksiyona **içine fonksiyon** denir.

ÖRNEK

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

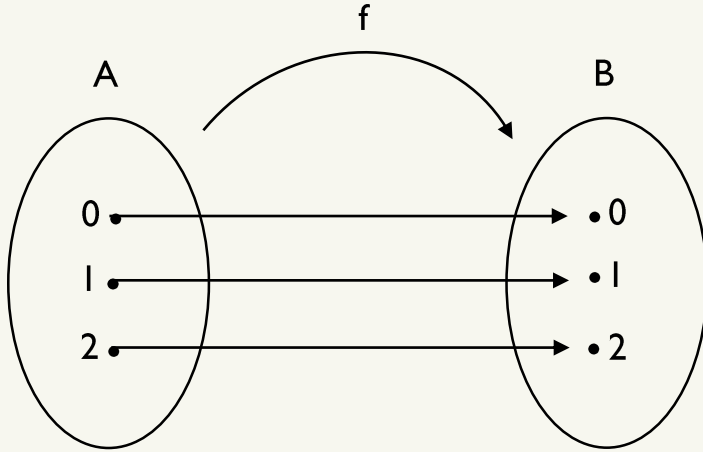
$f(x) = x + 4$ fonksiyonu örten midir?

KURAL: Grafiği verilen bir fonksiyonun örten olup olmadığını anlamak için değeri kümesi üzerinden x eksenine paraleller çizilir. Bu paraleller eğriyi daima kesiyorsa, fonksiyon örtendir. Eğer çizilen paralellerden bazıları eğriyi kesmiyorsa fonksiyon örten değil, içinedir.

D) Birim (Özdeş) Fonksiyon

f fonksiyonunun tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü yine kendisine eşit ise f 'ye **birim fonksiyon** denir ve $I(x)$ ile gösterilir.

$$f : A \longrightarrow A, f(x) = x$$



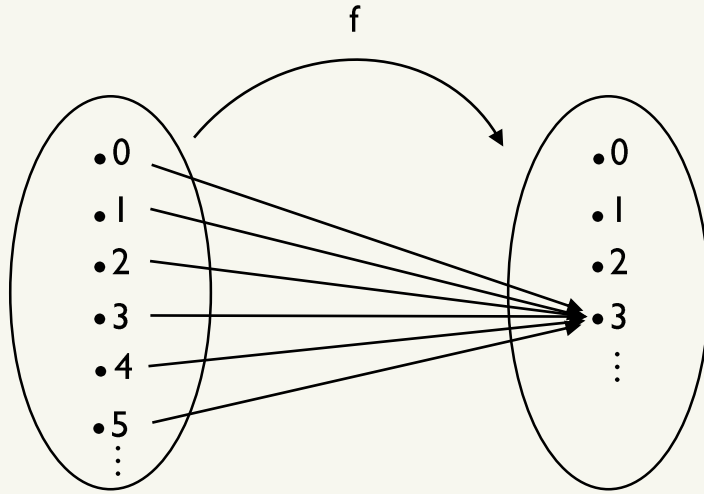
ÖRNEK

f fonksiyonu birim fonksiyon olsun.

$f(2x + 6) = ax + 2b$ olduğuna göre, $a + b$ toplamının değeri kaçtır?

E) Sabit Fonksiyon

Tanım kümesindeki her elemanı, sabit bir elemana eşleştiren fonksiyona **sabit fonksiyon** denir.



$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f : x \longrightarrow 3$$

ÖRNEK

$$F: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{3x - 6} \text{ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise, } \frac{a}{b} \text{ kaçtır?}$$

ÖRNEK

$$f(x) = \frac{ax^2 + 4x + 4}{x^2 + 6x + b} = k \text{ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise, a.b.k değeri kaçtır?}$$

F) Eşit Fonksiyonlar

$f : A \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow B$ iki fonksiyon olsun. f ve g fonksiyonları A 'nın her elemanı için aynı değeri alıyorsa f ve g 'ye eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ şeklinde gösterilir.

G) Fonksiyonlarda Dört İşlem

f ve g iki fonksiyon olmak üzere;

$$f : A \longrightarrow B$$

$$g : B \longrightarrow R, A \cap B \neq \emptyset \text{ olsun.}$$

$$1) f + g : A \cap B \longrightarrow R$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2) f - g : A \cap B \longrightarrow R$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$3) f \cdot g : A \cap B \longrightarrow R$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$4) \frac{f}{g} : A \cap B \longrightarrow R \quad \left[\frac{f}{g} \right] (x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)) \neq 0$$

ÖRNEK

$$f(x) = x^3 + 2x$$

$$g(x) = x - 1 \text{ olduğuna göre;}$$

a) $f + g$

b) $f \cdot g$

c) $\frac{f}{g}$

d) $4f$

e) $2f - 3g$

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 3x - 2$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, $(f - 2g)(2)$ işleminin sonucunu bulunuz.

KURAL: $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olmak üzere;

- 1) A'dan B'ye n^m tane fonksiyon tanımlanabilir.
- 2) B'den A'ya m^n tane fonksiyon tanımlanabilir.
- 3) A'dan B'ye $2^{m \cdot n} - n^m$ tane fonksiyon olmayan bağıntı tanımlanabilir.
- 4) A'dan B'ye $P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$ tane birebir fonksiyon tanımlanabilir. ($n \geq m$)
- 5) A'dan B'ye n tane sabit fonksiyon tanımlanabilir.
- 6) A'dan A'ya $m^m - m!$ tane içine fonksiyon tanımlanabilir.
- 7) A'dan A'ya $m!$ tane birebir ve örten fonksiyon tanımlanabilir.

3. Fonksiyonun Tersi

f fonksiyonu, A kümesindeki x elemanını B kümesindeki y elemanına eşlesin. B kümesindeki y elemanını A kümesindeki x elemanına eşleyerek oluşturulan fonksiyona f 'nin ters fonksiyonu denir.

$f : A \longrightarrow B$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun.

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ f 'nin ters fonksiyonudur.

Her fonksiyonunun tersi, fonksiyon olmayabilir. f , birebir ve örten fonksiyon ise f^{-1} bağıntısı da bir fonksiyondur. Eğer fonksiyon birebir ve örten değilse tersi, fonksiyon olmayıp bir bağıntıdır.

UYARI: $f(x) = y$ ise,

$$f^{-1}(y) = x \text{ olur.}$$

3.1. $f(x) = ax + b$ Tipi Fonksiyonların Tersİ

KURAL: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b \text{ ise,}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a} \text{ dır.}$$

ÖRNEK

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f(x) = 4x + 5$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

3.2. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ Tipi Fonksiyonların Tersi

KURAL: $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ ise,}$$

$$f(x) = \frac{-dx + b}{cx - a} \text{ 'dır.}$$

ÖRNEK

$f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 5}$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

3.3. $x^2 + Ax + B$ Tipi Fonksiyonların Tersi

ÖRNEK

$x > -3$ olmak üzere;

$y = f(x) = x^2 + 6x + 8$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

ÖRNEK

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{4\}$$

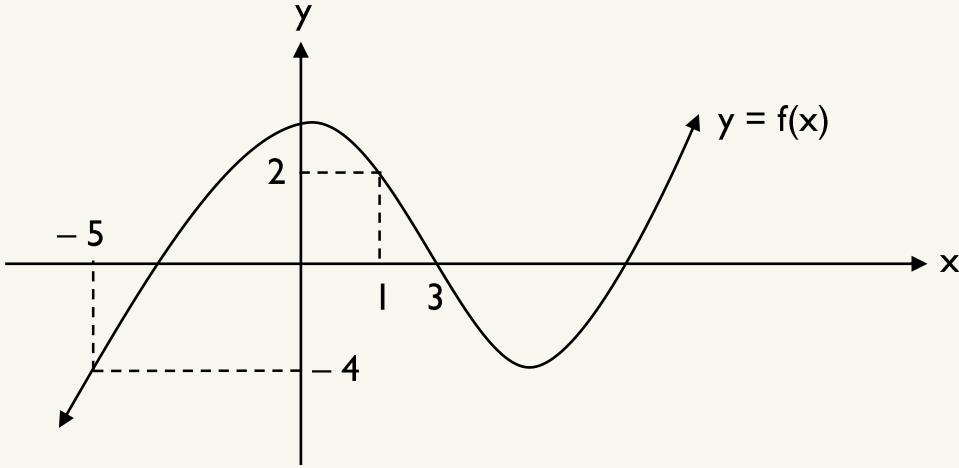
$$f(x) = \frac{ax + 1}{4x - b} \text{ fonksiyonu } 1 - 1 \text{ örten ise, } a + b \text{ toplamı kaçtır?}$$

ÖRNEK

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{2 - f(x)}{2 + f(x)} \text{ olduğuna göre, } f^{-1}(x) \text{ 'i bulunuz.}$$

Bir fonksiyon ile tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.



Şekildeki $y = f(x)$ 'in grafiđine göre;

$$f(5) = \quad f^{-1}(0) =$$

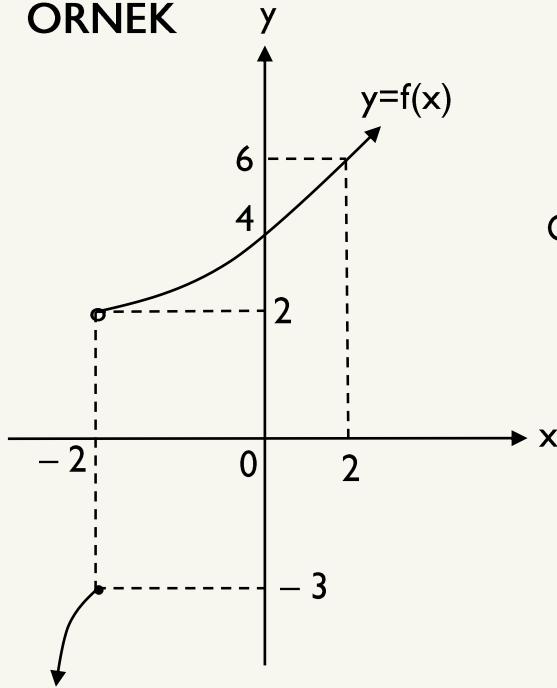
$$f(3) = \quad f^{-1}(0) =$$

$$f(1) = \quad f^{-1}(2) =$$

$$f(-5) = \quad f^{-1}(-4) =$$

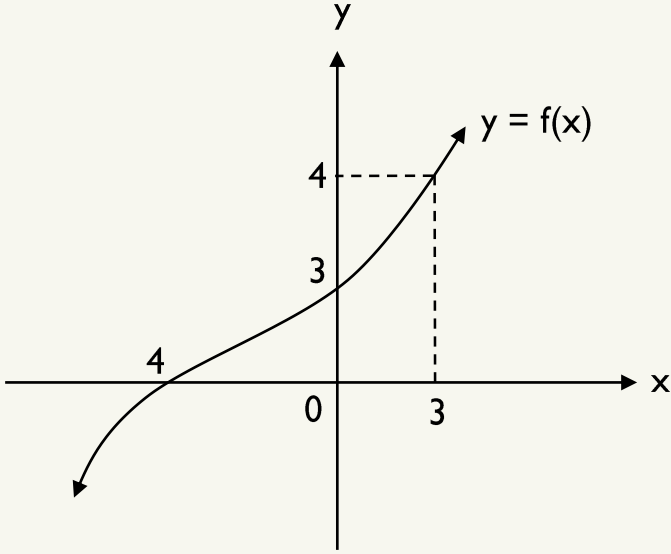
NOT: $y = f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonun grafiğinde $f(a)$ değeri bulunurken $x = a$ olan y değerine bakılır. Diğer bir deyişle (a,b) noktası $y = f(x)$ fonksiyonu üzerinde ise, $f(a) = b$ 'dir. $f^{-1}(m)$ değeri bulunurken $y = m$ olan x değerine bakılır. Diğer bir deyişle (n, m) noktası $y = f(x)$ fonksiyonu üzerinde ise $f^{-1}(m) = n$ 'dir.

ÖRNEK



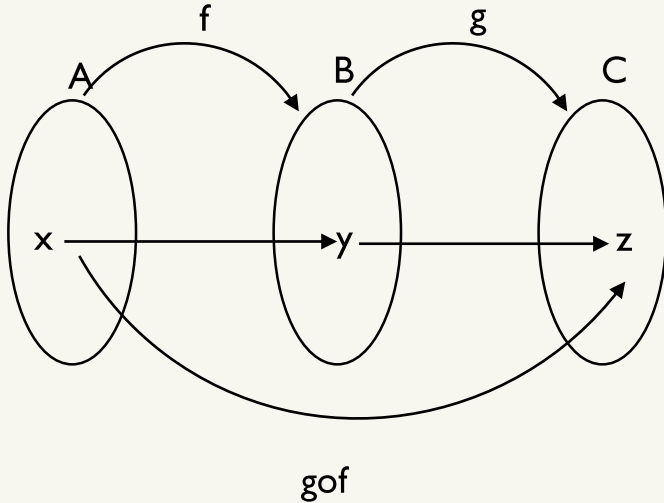
Grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir. $f^{-1}(6) + f(0) + f(-2)$ toplamı kaçtır?

ÖRNEK



Şekildeki grafiğe göre $f(x + 1) = f^{-1}(4)$ eşitliğini sağlayan x değeri nedir?

4. Fonksiyonların Bileşkesi



$$f : A \longrightarrow B \qquad f(x) = y \dots\dots\dots (1)$$

$$f : x \longrightarrow y$$

$$g : B \longrightarrow C \qquad g(y) = z \dots\dots\dots (2)$$

$$g : y \longrightarrow z$$

y'nin (1) 'deki değerini (2) 'de yerine yazalım.

$$g(y) = z \text{ ise } g(f(x)) = z \text{ yani } (g \circ f)(x) = z$$

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$g \circ f : x \longrightarrow z \quad (g \circ f)(x) = z \text{ olmaktadır.}$$

g ∘ f “ g bileşkesi f” diye okunur.

ÖRNEK

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x + 1$ olduğuna göre, $(g \circ f)(x)$ ve $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÖRNEK

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 2x$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3 + 1 \quad \text{olduğuna göre, } (f \circ g)(1) \text{ kaçtır?}$$

KURAL: $y = f(g(x))$ fonksiyonundan $y = f(x)$ 'i elde etmek için x yerine $g^{-1}(x)$ yazılır.

1) $f \neq g$, $f \neq g^{-1}$ ve $f \neq I$, $g \neq I$ olmak üzere; $f \circ g \neq g \circ f$

2) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$

3) I birim fonksiyon olmak üzere; $f \circ I = I \circ f = f$ dir.

4) f 'nin tersi f^{-1} olmak üzere; $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ dir.

5) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

KURAL:

$$f^{-1} \circ (f \circ g) = g$$

$$(f \circ g) \circ f^{-1} = f$$

$$f \circ (f^{-1} \circ g) = g$$

$$(f \circ g^{-1}) \circ g = f$$

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 'ye fonksiyon ve $(f \circ f)(x) = 4x - 9$ olduğuna göre $f^{-1}(2)$ kaç olabilir?

ÖRNEK

$f(x) = 2^{2x+3}$ olduğuna göre, $f(2x)$ 'in $f(x)$ cinsinden ifadesi nedir?

ÖRNEK

$\mathbb{R}$ 'de tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$f(x) = 2x - 3$ olduğuna göre; $f(3x + 2)$ fonksiyonunun $f(x)$ cinsinden ifadesi nedir?

ÖRNEK

$f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye tanımlanan bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$$f(1) = 5 \text{ ve } f(x + 1) = f(x) + \frac{1}{3}$$

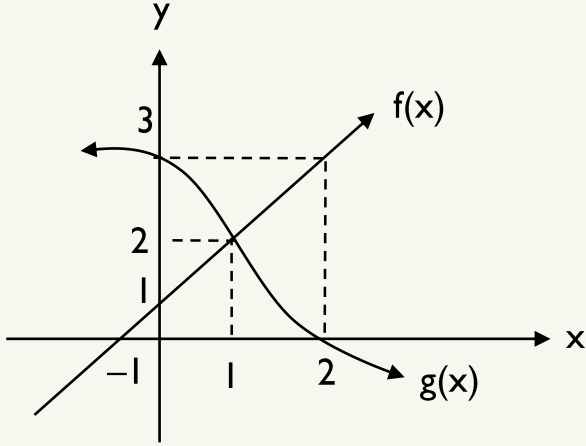
olduğuna göre, $f(5)$ kaçtır?

ÖRNEK

$$f(x - 1) = x^2 - 1$$

$g(2x + 1) = 2x + 3$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, $(f \circ g)(3)$ kaçtır?

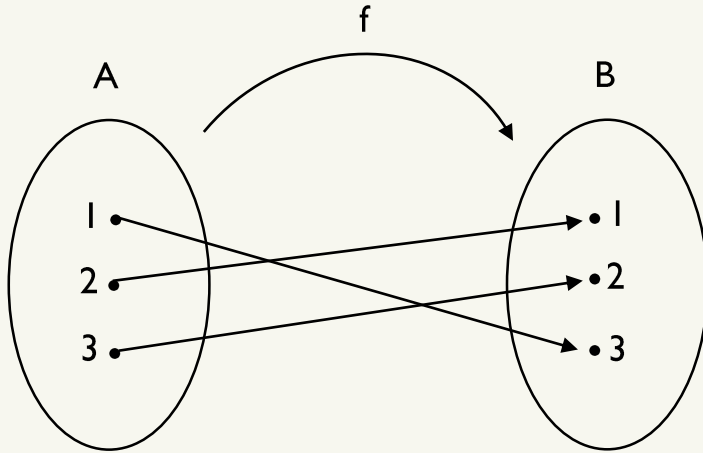
ÖRNEK



Şekilde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre, $(f \circ g^{-1})(3)$ kaçtır?

5. Permütasyon Fonksiyonu

Tanım ve değer kümeleri aynı olan birebir ve örten fonksiyonlara permütasyon fonksiyonu denir.



f , birebir ve örtendir. $A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere,

$$f : A \longrightarrow A$$

$f = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan, bir permütasyon fonksiyonudur.

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlanan,

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

permütasyonunun tersi olan f^{-1} permütasyonunu bulunuz.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

fonksiyonları A 'dan A 'ya tanımlı iki permütasyon fonksiyonu olsun. Buna göre, $(f \circ g)$ permütasyonu nedir?

ÖRNEK

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{pmatrix} \text{ ise,}$$

g permütasyonunu bulunuz.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

permütasyonları tanımlanıyor. $(f \circ g^{-1})(2)$ değeri nedir?