

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT 2

İNTEGRAL

İntegral Alma Kuralları

Diferansiyel Kavramı

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için türevli ise,

$\frac{d}{dx} (f(x)) = f'(x)$ ifadesine $f(x)$ 'in türevi denir.

$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx$ ifadesine $f(x)$ 'in diferansiyeli denir.

ÖRNEK

$$d(3x^3 + 2x + 1) = (9x^2 + 2) \cdot dx$$

$$d(u^3 - u^2 + 2u + 2) = (3u^2 - 2u + 2) \cdot du$$

$$d(\sin t + e^t) = (\cos t + e^t) \cdot dt$$

Belirsiz İntegral

Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x) \cdot dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ 'in belirsiz integrali denir.

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$$

$c \in \mathbb{R}$ sayısına integralin sabiti denir.

$\int$ simgesine integral işareti, f fonksiyonundan $F(x) + c$ fonksiyonunun elde edilmesini sağlayan işleme integral alma işlemi denir.

$F(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu denir.

$\int f(x) \cdot dx$ ifadesindeki x değişkenine integral değişkeni, $f(x)$ fonksiyonuna ise integrant denir.

İntegralin Özellikleri

$$1) \int d(f(x)) = f(x) + c$$

$$2) \frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot dx \right) = f(x)$$

$$3) d \left(\int f(x) \cdot dx \right) = f(x) \cdot dx$$

$$4) \int a \cdot f(x) \cdot dx = a \cdot \int f(x) \cdot dx$$

$$5) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$6) \int f(x) \cdot dx = \int f(y) dy = \int f(u) \cdot du$$

ÖRNEK

$$\int d(x^2 + 3) = x^2 + 3 + c$$

ÖRNEK

$$\frac{d}{dx} \left(\int \sin x \cdot dx \right) = \sin x$$

ÖRNEK

$$d \left(\int e^x \cdot dx \right) = e^x \cdot dx$$

İntegral Alma Kuralları

$$1) \int a \cdot dx = ax + c$$

$$2) \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$4) \int e^x \cdot dx = e^x + c \quad , \quad \int e^{x+m} \cdot dx = e^{x+m} + c$$

$$5) \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad , \quad \int a^{x+m} \cdot dx = \frac{a^{x+m}}{\ln a} + c$$

$$6) \int \cos x \cdot dx = \sin x + c \quad , \quad \int \cos(mx) \cdot dx = \frac{1}{m} \sin(mx) + c$$

$$7) \int \sin x \cdot dx = -\cos x + c \quad , \quad \int \sin(mx) \cdot dx = -\frac{1}{m} \cos(mx) + c$$

$$8) \int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \cdot dx = \tan x + c$$

$$9) \int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx = -\cot x + c$$

$$10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$$

$$11) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

ÖRNEK

$\int 5 \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (x^3 + 4x) \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (6x^2 - 9x + 5) \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (x + 2) \cdot (2x - 3) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int -\frac{dx}{x^3}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sqrt[3]{x} \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x}) \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (\sqrt{x} + 1)^2 dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sqrt{x} \cdot (2 + 5x^2) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{x^3 + 3}{x^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \ln x \cdot dy$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{(x + 1)^2}{x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (e^x + x^2) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (3^x - x^3) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (\sin x + \cos x) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} x}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin^2 x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{1+x} - \int \frac{x^2}{1+x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \tan^2 x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \left(\tan x + \sin x + \frac{2}{x} \right) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{1+x^2}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int x^2 \cdot d(3x)$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{d(x^3 - x^2)}{x}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \operatorname{cosec} x \cdot d(\cos x)$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{d}{dx} \left(\int \sin^2 x \cdot dx \right)$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \ln x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int x \cdot f(x) \cdot dx = x^2 + x + c$ olduğuna göre, $f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2 B) $x + \ln x$ C) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + cx$ D) $x + 1$ E) $2 + \frac{1}{x}$

ÖYS 1987

ÖRNEK

$f'(x) = 5x + 3$ ve $f(2) = 4$ olduğuna göre, $f(1)$ 'in değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \int (3x^2 - 2x) dx$ fonksiyonu A $(-1, 3)$ noktasından geçtiğine göre, $f(2)$ 'nin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$ fonksiyonunun ilkeli $x = 1$ için 8 değerini alıyorsa, $x = 2$ için kaç değerini aldığını bulunuz.

ÖRNEK

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f'(0) = 4$$

$$f(0) = 1$$

koşullarını gerçekleyen f fonksiyonu için $f(1)$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

LYS 2010

ÖRNEK

$f(2x + 1) = \int x^2 \cdot d(3x)$ olduğuna göre, $f(1) - f(-3)$ farkını bulunuz.

ÖRNEK

$\int (f(x) + x \cdot f'(x)) dx = x^2 - 2x + 2$ ve $f(1) = 3$ olduğuna göre, $f(2)$ 'nin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$y = f(x)$ fonksiyonuna, üzerindeki her bir (x, y) noktasından çizilen teğetin eğimi $3x + 5$ 'tir. $y = f(x)$ fonksiyonunun en küçük değeri 6 olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÖRNEK

$f(x)$ fonksiyonuna $A(3, 1)$ noktasında teğet olan doğrunun eğimi 2'dir. $f''(x) = 2x + 1$ olduğuna göre, $f(0)$ 'ın değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{d}{dx} \int d(x^4 - x^3 + 2) dx$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisini bulunuz.

İntegral Alma Yöntemleri

Değişken Değiştirme Yöntemi

$\int f(x) dx$ integrali, integral alma kuralları ile doğrudan hesaplanamayabilir. Bu durumda integralde uygun bir dönüşüm yapılarak, integral daha basit bir integrale dönüştürülür.

Genelde değişken, değiştirilecek ifadenin türevi yanında bulunmalıdır.

- Kuvvet fonksiyonunda genelde tabana değişken değiştirilir.
- Üstel fonksiyonlarda genelde kuvvete değişken değiştirilir.
- Trigonometrik fonksiyonlarda genelde açığa değişken değiştirilir.

ÖRNEK

$\int (x + 2)^4 dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (x^2 + 6x + 1)^3 \cdot (2x + 6) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sqrt[5]{x+3} \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (2x + 1)^6 dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{6x^2 + 12}{\sqrt{x^3 + 6x + 10}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (\tan^7 x + \tan^5 x) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{x+3} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 4\sin^3 x \cdot \cos x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\ln x}{x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sin^2 x \cdot \sin 2x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \cos x \cdot \sin 2x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{3}{3x+2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \tan x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{e^x}{e^x + 2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{x \ln x}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{x + e^{2x}}{x^2 + e^{2x}}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int e^{x+5} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 2x \cdot e^{x^2+5} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\int -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int e^{2x+5} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 2^{x-3} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 3^{2x-4} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 5^{\tan x} \cdot \sec^2 x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \pi x^2 \cdot x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{2^{-x+8}}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 5^x \cdot e^x dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sin(x + 3) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 2x \cdot \cos(x^2 - 2) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sin(6x + 2) dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{3dx}{\cos^2(3x-5)}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{x \cdot \sin^2(\ln x)}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \cos(\sin x) \cdot \cos x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sin(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^2(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 2x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (x + 1)^2 (x - 2)^4 dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+3} + 5}{\sqrt{x+3}} dx \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

I) $m, n \in \mathbb{Z}$

$\int (\sin x)^{2n+1} \cdot (\cos x)^{2m+1} \cdot dx$ integralinde kuvveti küçük olan ifade,

$$(\sin x)^{2n+1} = (\sin x)^{2n} \cdot \sin x \quad \text{veya} \quad (\cos x)^{2n+1} = (\cos x)^{2n} \cdot \cos x$$

şeklinde yazılarak $\cos x = t$ veya $\sin x = t$ dönüşümü yapılır.

ÖRNEK

$\int \cos^3 x \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

2) $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\int (\sin x)^{2n} \cdot (\cos x)^{2m+1} \cdot dx$$

integralinde kuvveti küçük olan $(\cos x)^{2m} \cdot \cos x$ şeklinde yazılarak $\sin x = t$ dönüşümü yapılır.

ÖRNEK

$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

3) $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$\int (\sin x)^{2n} \cdot dx \quad \text{veya} \quad \int (\cos x)^{2m} \cdot dx$$

integrallerinde;

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{veya} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

formülleri kullanılarak derece indirgemesi yapılır.

ÖRNEK

$\int \sin^2 x \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int 16 \sin^2 4x \cdot \cos^2 4x \cdot dx$ integralinin eşitini bulunuz.

4) $\int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx$
veya
 $\int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx$
veya
 $\int \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx$ } integrallerinde ters dönüşüm formülleri uygulanır.

NOT

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} (\cos(a + b) - \cos(a - b))$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

ÖRNEK

$4 \int \cos 6x \cos 4x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

5) Özel Dönüşümler

ÖRNEK

$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx$ integralinde $x = 2 \cdot \sin t$ dönüşümü yapılırsa elde edilecek integrali bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sqrt{9 + x^2} dx$ integralinde $x = 3 \cdot \tan t$ dönüşümü yapılırsa elde edilecek integrali bulunuz.

ÖRNEK

$\int \sqrt{x^2 - 25} \, dx$ integralinde $x = 5 \cdot \sec t$ dönüşümü yapılırsa elde edilecek integrali bulunuz.

Rasyonel Fonksiyonların İntegrali

A) Payın derecesi, paydanın derecesinden büyük veya eşitse polinom bölmesi yapılır.

ÖRNEK

$\int \frac{x+3}{x+2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 2} dx \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

B) Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integrali için; $\deg [P(x)] < \deg [Q(x)]$ ise basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılır.

$$\bullet \frac{P(x)}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d}$$

$$\bullet \frac{P(x)}{(ax + b)^2} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2}$$

$$\bullet \frac{P(x)}{(ax + b) \underbrace{(cx^2 + dx + e)}_{\Delta < 0}} = \frac{A}{ax + b} + \frac{Mx + N}{cx^2 + dx + e}$$

ÖRNEK

$\int \frac{2dx}{x^2 - 1}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{5dx}{(x-2)(x+3)}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{3x + 3}{x^2 - 9} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{5x + 3}{(x + 1)(x - 1)^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} - e^x - 6}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int \frac{4\cos x \, dx}{\sin^2 x - 2\sin x - 3} \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

C) Arctan'lı İfadeler

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \text{Arctan}x + c = -\text{Arccot}x + c$$

Diagram annotations:

- Arrow from the numerator '1' to the text: tam karesi alınan ifadenin türevi
- Arrow from the denominator '1' to the text: mutlaka olmalıdır.
- Arrow from the denominator 'x²' to the text: tam kare ifade

ÖRNEK

$\int \frac{1}{1 + (x + 3)^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{16 + x^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{1 + 4x^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{x \cdot (1 + \ln x^2)}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 29}$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{25 + 49x^2} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

D) Arcsin'li İfadeler

$$\int \frac{\textcircled{1}}{\sqrt{\textcircled{1} - \textcircled{x^2}}} \cdot dx = \text{Arcsin}x + c = -\text{Arccos}x + c$$

↑ tam karesi alınan ifadenin türevi

↓ mutlakla tam kare olmalıdır. ifade

ÖRNEK

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 3)^2}} \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{1 - (2x + 8)^2}} \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} \text{ integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 6x - 8}} \quad \text{integralinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \text{ integralinin eşitini bulunuz.}$$

Kısmi İntegral

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

↓ ↓
Türevi İntegrali
alınacak alınacak
ifade ifade

u'yu seçerken genelde öncelik sırası olarak,

L	A	P	T	Ü	kullanılır.
Logaritmali ifadeler	Arc'lı ifadeler	Polinomlar	Trigonometrik ifadeler	Üstel ifadeler	

ÖRNEK

$\int x \cdot e^x dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int x \cdot \sin x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \ln x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int \arctan x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int e^{\sqrt{x}} dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int e^x \cdot \sin x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

NOT:

Bazı kısmi integral sorularını aşağıdaki pratik yol yardımıyla daha kolay çözebiliriz.

Pratik yolu kullanabilmemiz için;

- Çarpanlardan birinin polinom fonksiyon,
- Diğerinin ise integrali kolay alınabilen bir ifade olması gerekir.

ÖRNEK

$\int 2x^2 \cdot e^x dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int x^3 \cdot \cos x \, dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\int (3x + 1) 2^x dx$ integralinin eşitini bulunuz.

Belirli İntegral

$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $\forall x \in (a, b)$ için;

$$\begin{array}{l} \text{Üst} \\ \text{sınır} \end{array} \begin{array}{c} \swarrow \\ \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ olur.} \\ \searrow \\ \text{Alt sınır} \end{array}$$

Belirli İntegralin Özellikleri

$$1) \int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx \quad , \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$2) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

$$3) \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$4) \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

$$5) \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad , \quad (a < c < b)$$

ÖRNEK

$\int_{-2}^4 (x^2 - 3x) dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_0^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖYS 1987

ÖRNEK

$\int_a^b (2x + 3) dx = 50$ ve $b - a = 5$ olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

ÖRNEK

$b > 0$ olduğuna göre,

$\int_0^b (2x - x^2) dx$ integralinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

ÖSS 2008

ÖRNEK

$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2} + \ln 2$

B) $-1 + \ln 2$

C) $\ln 2$

D) $2\ln 2$

E) $1 + 2\ln 2$

ÖSS 2007

ÖRNEK

$\int_0^1 (x + 1) e^x dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) e

B) e – 1

C) e – 2

D) 2e – 1

E) 2e – 3

ÖSS 2009

ÖRNEK

$$\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}} dx \text{ integralinin değeri kaçtır?}$$

- A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

LYS 2010

ÖRNEK

$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

LYS 2010

ÖRNEK

$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x (\ln x)^2}$ integralinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

ÖSS 2008

ÖRNEK

$\int_1^e \ln^3 x \, dx = 6 - 2e$ olduğuna göre, $\int_1^e \ln^4 x \, dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) $7e - 16$

B) $8e - 18$

C) $9e - 24$

D) $10e - 26$

E) $11e - 28$

LYS 2011

ÖRNEK

$\int_0^1 d(4x + x^2)$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_0^1 x^{a+1} dx = \int_0^1 (a+2) dx$ olduğuna göre, a 'nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

ÖRNEK

Bir f fonksiyonunun grafiğinin $x = a$ noktasındaki teğetinin eğimi 1 , $x = b$ noktasındaki teğetinin eğimi $\sqrt{3}$ 'tür. $f''(x)$ ikinci türev fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğuna göre,

$\int_b^a f'(x) \cdot f''(x) dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

LYS 2011

ÖRNEK

$\int_0^2 \frac{d(x^3)}{x^3 + 1}$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_0^1 (1 + x^5)^3 x^4 dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_0^{\pi/4} e^{\tan x} \sec^2 x \, dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^3 x \, dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_{-1}^3 f(2x + 1) dx = A$ olduğuna göre, $\int_{-1}^7 f(x) dx$ integralinin değerini A cinsinden bulunuz.

ÖRNEK

$\int_1^4 (f(x) + 2) \, dx = A$ olduğuna göre, $\int_4^1 (2f(x) + 2) \, dx$ integralinin değerini A cinsinden bulunuz.

ÖRNEK

$$\int_1^3 x \, dx + \int_3^4 x \, dx + \int_4^7 x \, dx \quad \text{integralinin değerini bulunuz.}$$

NOT:

1) $f(x)$, tek fonksiyon ise $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

2) $f(x)$, çift fonksiyon ise $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ olur.

ÖRNEK

$\int_{-13}^{13} (x + \sin x) \, dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x)$ fonksiyonu $x \in (-2, 2)$ için tek fonksiyondur. $f(0) = 4$, $f(2) = 8$ ise; $\int_{-2}^2 f'(x) dx$ integralinin değerini bulunuz.

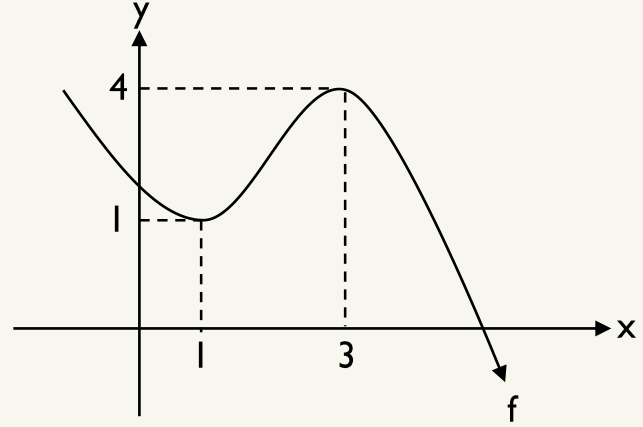
ÖRNEK

Yanda grafiğı verilen f fonksiyonu için

$$\int_1^3 \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} dx \text{ integralinin değeri kaçtır?}$$

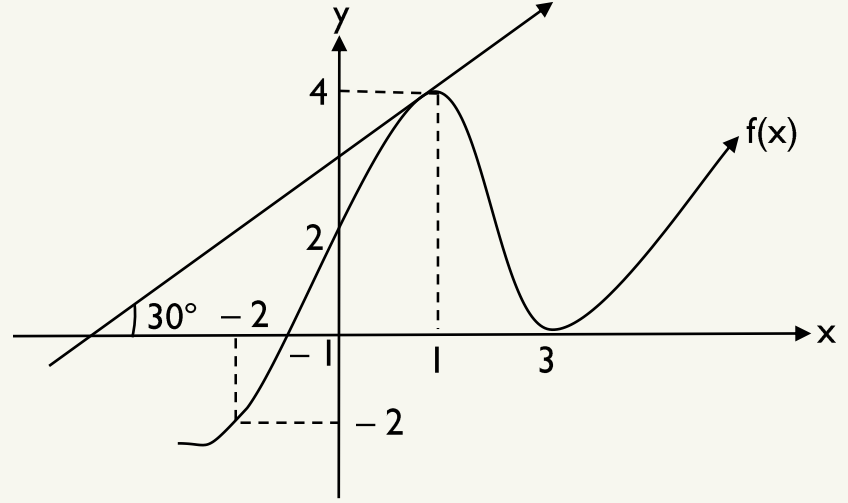
- A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

LYS 2010



ÖRNEK

Yandaki $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre,
 $\int_1^3 f'(x) f''(x) dx$ integralinin değerini bulunuz.



Leibnitz Teoremi

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \text{ olduğuna göre,}$$

$$F'(x) = f(b(x)) b'(x) - f(a(x)) a'(x) \text{ olmaktadır.}$$

ÖRNEK

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{10}^{22} (x^2 + 3x - 7) dx \right) \text{ ifadesinin eşitini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$f(x) = \int_3^{x^3} \frac{dt}{t^2 + t}$ olduğuna göre, $f'(2)$ 'nin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$ olduğuna göre, $f'(1)$ 'in değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \int_{-x}^{x^2} t \, dt$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonuna $x = 3$ apsisli noktada çizilen teğetin eğimini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\int_9^{x^2} t^2 dt}{x^2 - 9} \text{ ifadesinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\int_0^{\pi/6} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_0^t \cos 3x \, dx \right) \right] dt \text{ değeri kaçtır?}$$

- A) $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

ÖYS 1996

Parçalı Fonksiyonların İntegrali

$[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ parçalı fonksiyon için, $a < c < b$ ve $x = c$, $f(x)$ 'in kritik noktası ise;

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \text{ olarak parçalanır.}$$

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x > 2 \text{ ise} \\ 2x + 1 & , x \leq 2 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olduğuna göre,}$$

$\int_1^3 f(x) \, dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & , x < 2 \text{ ise} \\ 2x - 3 & , x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$\int_1^3 f(x + 1) dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10

LYS 2010

Mutlak Değer Fonksiyonunun İntegrali

Mutlak değerın kritik noktası, belirli integralin sınırlarının arasındaısa, belirli integralin sınırları kritik noktaya göre parçalanarak integral hesaplanır.

ÖRNEK

$\int_{-1}^2 |x - 1| \, dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_{-2}^1 |x| (x + 1) dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int_0^4 (|x - 1| + |x + 3|) dx \quad \text{integralinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\int_0^{\pi} |\sin x \cos x| dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$ integralinin değerini bulunuz.

Dönüşüm Soruları

ÖRNEK

$\int_1^3 \frac{2x+3}{x-2} dx$ integralinde $t = x + 2$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

ÖRNEK

$\int_{\ln \pi}^{\ln 3\pi} \sin(e^x) \cdot e^x \cdot dx$ integralinde $e^x = u$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

ÖRNEK

$\int_1^{16} \sqrt{9-x^2} \, dx$ integralinde $x = u^4$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

ÖRNEK

$\int_1^{e^4} \cos(\ln x) \cdot dx$ integralinde $\ln x = t$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

ÖRNEK

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sin(\arctan x) \cdot dx$ integralinde $\arctan x = u$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

ÖRNEK

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x) \cdot dx$ integralinde $t = \pi - x$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

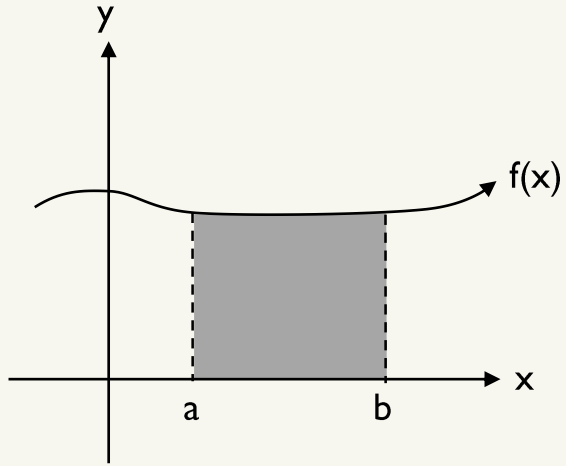
ÖRNEK

$\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin(\arccos x) \cdot dx$ integralinde $t = \arccos x$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

ÖYS 1995

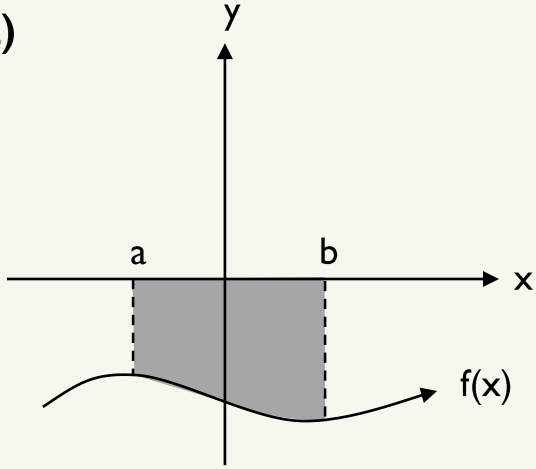
İntegralde Alan

1)



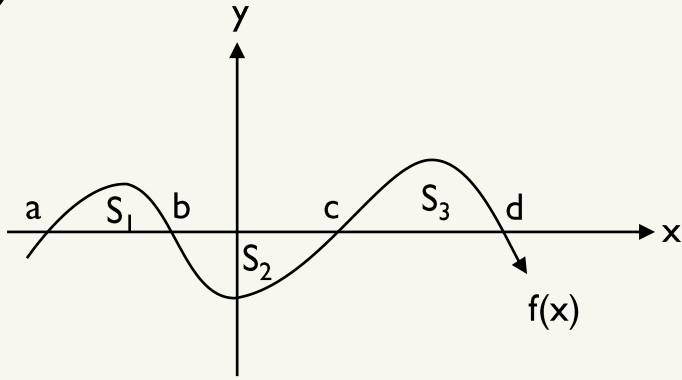
$$\text{Taralı alan} = \int_a^b f(x) \, dx$$

2)



$$\text{Taralı alan} = - \int_a^b f(x) \, dx$$

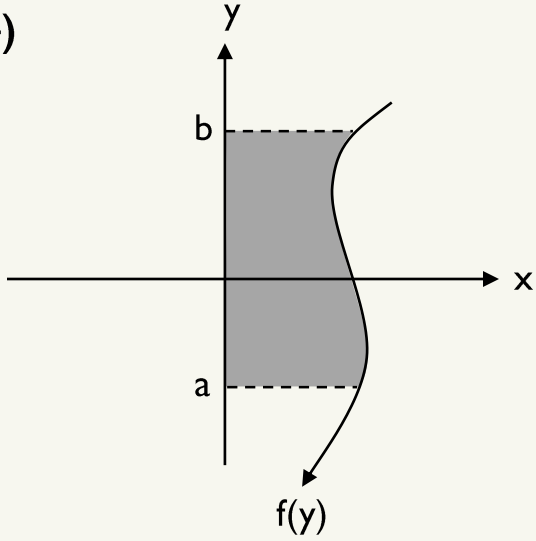
3)



$$\int_a^d f(x) \, dx = S_1 - S_2 + S_3$$

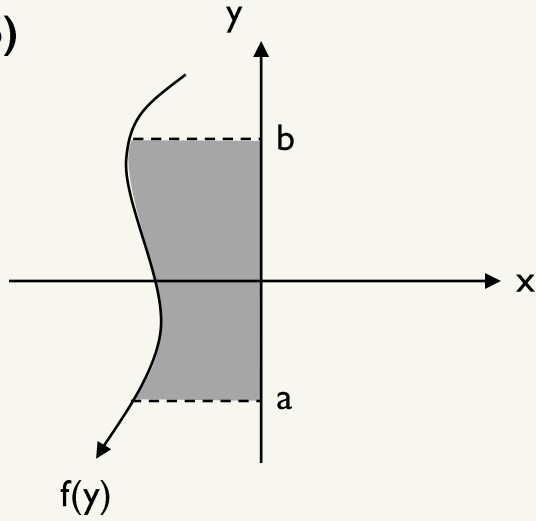
$$\int_a^d |f(x)| \, dx = S_1 + S_2 + S_3$$

4)



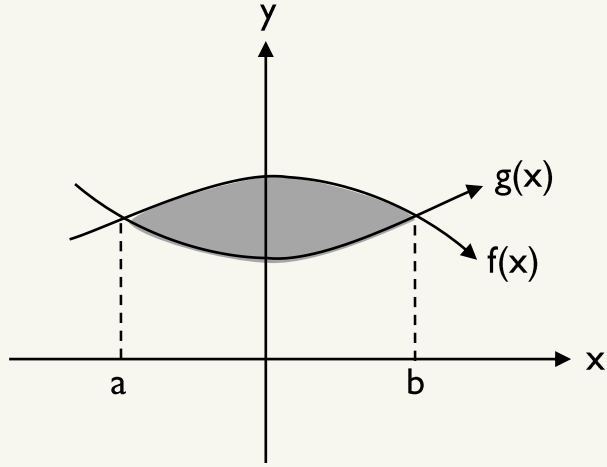
$$\text{Taralı alan} = \int_a^b f(y) dy$$

5)



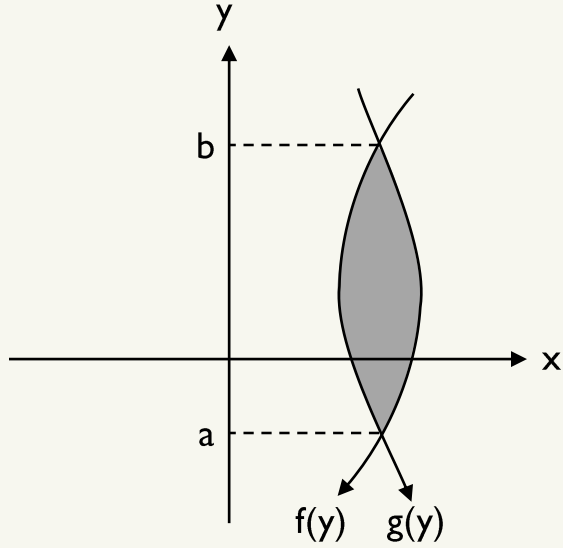
$$\text{Taralı alan} = - \int_a^b f(y) dy$$

6)



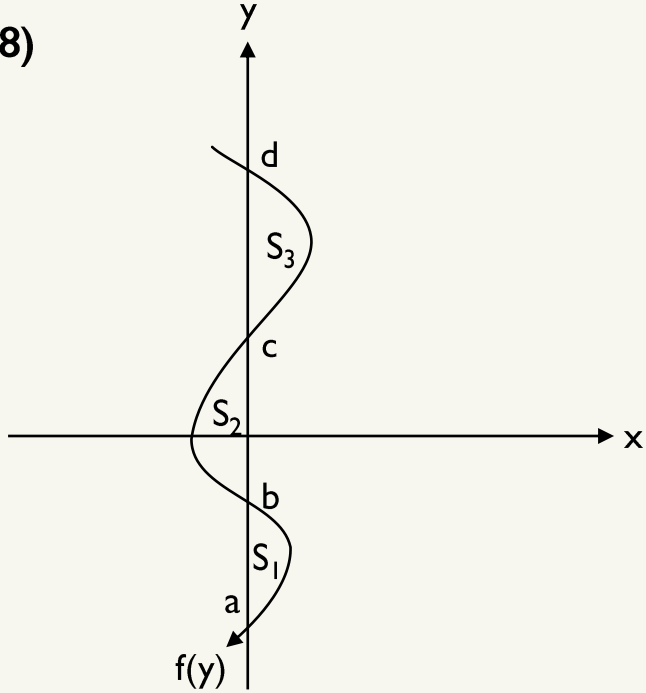
$$\text{Taralı alan} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

7)



$$\text{Taralı alan} = \int_a^b (f(y) - g(y)) dy$$

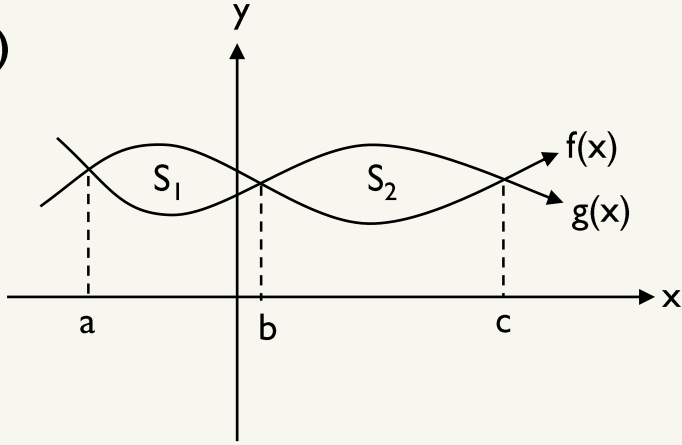
8)



$$\int_a^d f(y) dy = S_1 - S_2 + S_3$$

$$\int_a^d |f(y)| dy = S_1 + S_2 + S_3$$

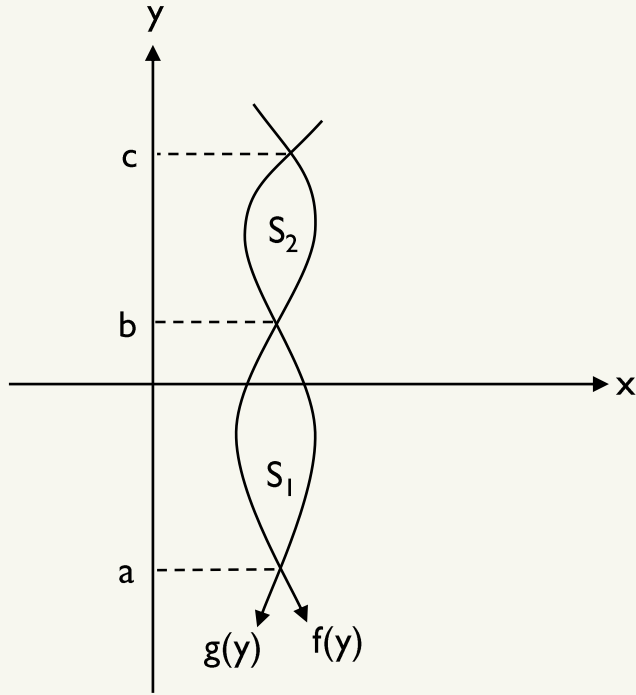
9)



$$S_1 = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

$$S_2 = \int_b^c (g(x) - f(x)) \, dx$$

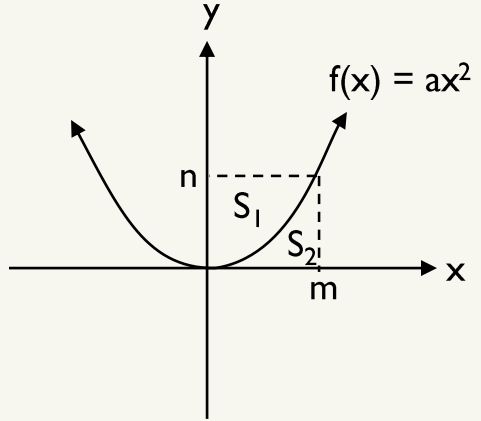
10)



$$S_1 = \int_a^b (g(y) - f(y)) dy$$

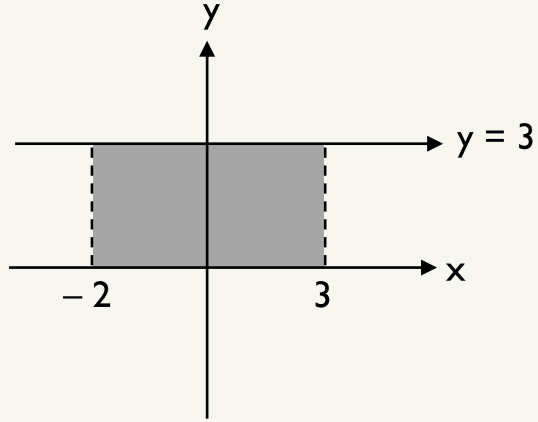
$$S_2 = \int_b^c (f(y) - g(y)) dy$$

NOT:



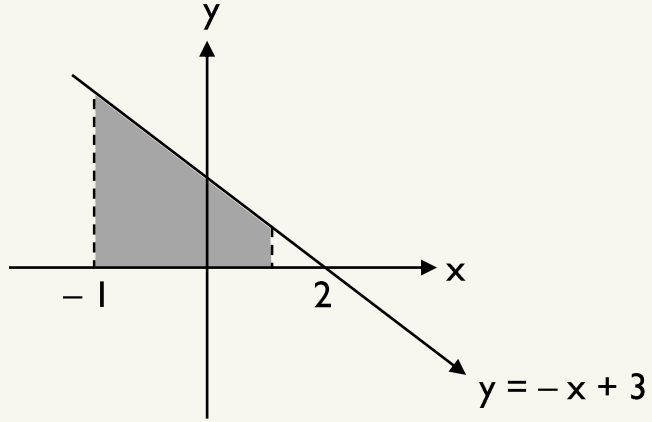
$$S_1 = 2S_2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK



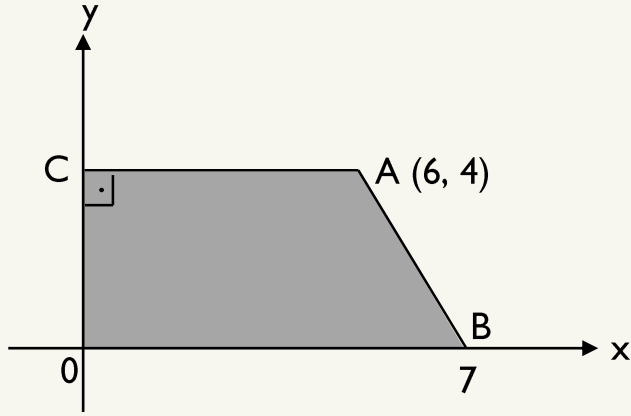
Taralı bölgeyi ifade eden integrali bulunuz.

ÖRNEK



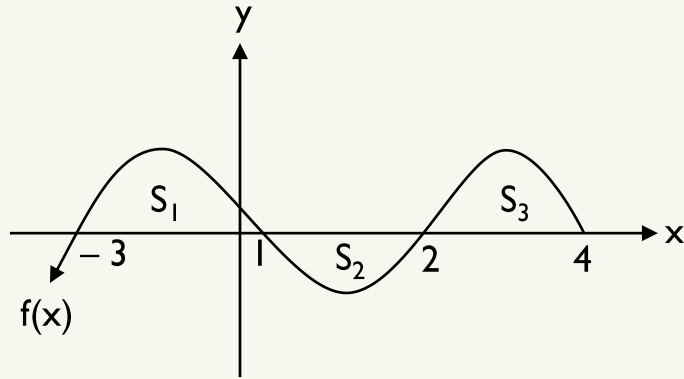
Taralı bölgeyi ifade eden integrali bulunuz.

ÖRNEK



Taralı bölgeyi ifade eden integrali bulunuz.

ÖRNEK

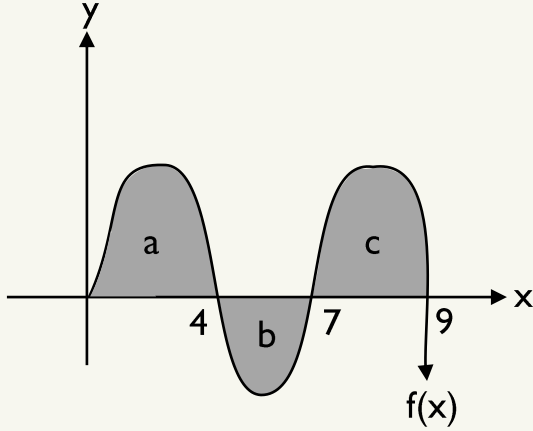


$$S_1 = 7 \text{ br}^2$$

$$S_2 = 5 \text{ br}^2$$

$S_3 = 2 \text{ br}^2$ olduğuna göre, $\int_{-3}^4 f(x) \, dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK



Yanda verilen taralı bölgelerin alanları sırasıyla a, b ve c birim karedir. Buna göre, $\int_0^9 |f(x)| dx - \int_0^7 f(x) dx$ değeri kaçtır?

A) $2a + b$

B) $2a + c$

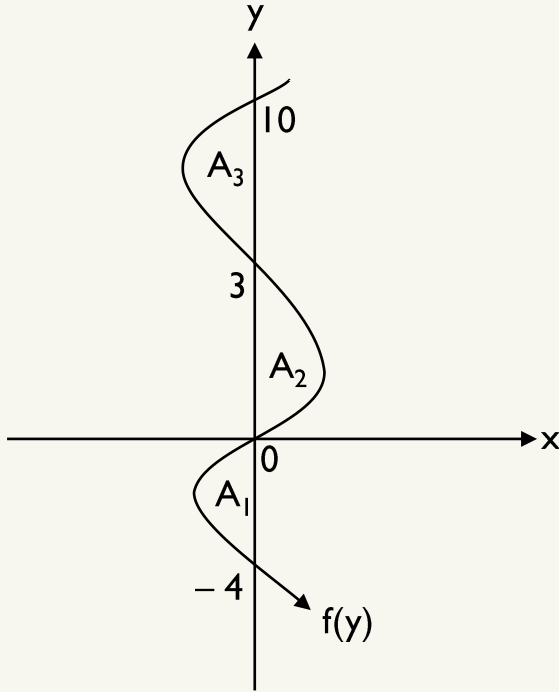
C) $2b + c$

D) $2c + b$

E) $2a + 2b + 2c$

ÖSS 2009

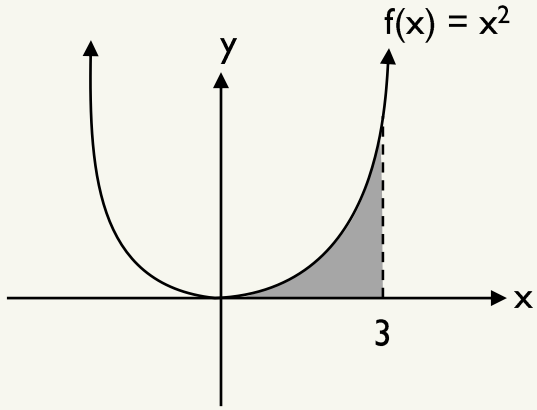
ÖRNEK



$$\int_{-4}^{10} f(y) dy = -12 \text{ ve } A_1 + A_2 + A_3 = 20 \text{ br}^2 \text{ olduğuna göre,}$$

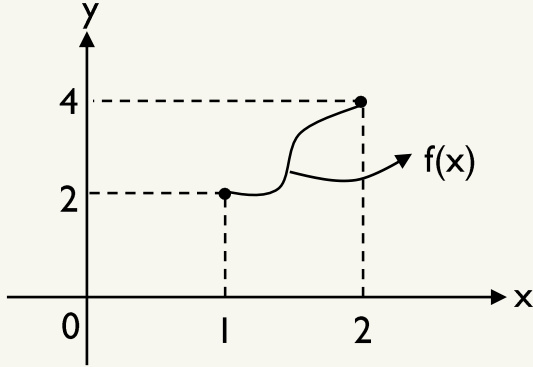
$$\int_0^3 f(y) dy \text{ integralinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK



Taralı bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen birebir ve örten

$f: [1, 2] \longrightarrow [2, 4]$ fonksiyonunun tersi f^{-1} 'dir.

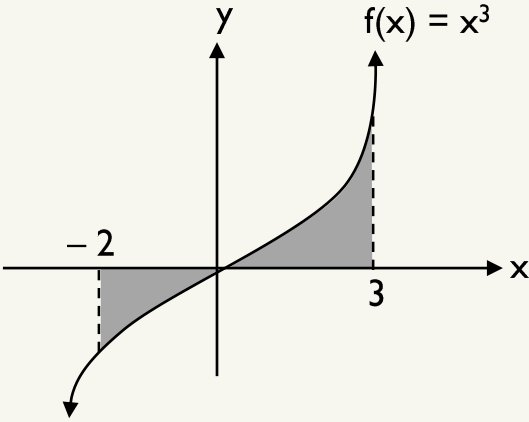
Buna göre, $\int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f^{-1}(x) dx$ toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

ÖSS 2006

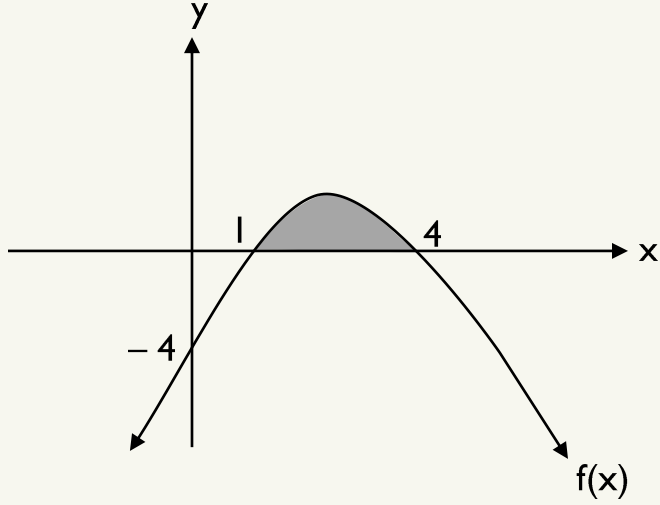
ÖRNEK

Taralı bölgenin alanını bulunuz.



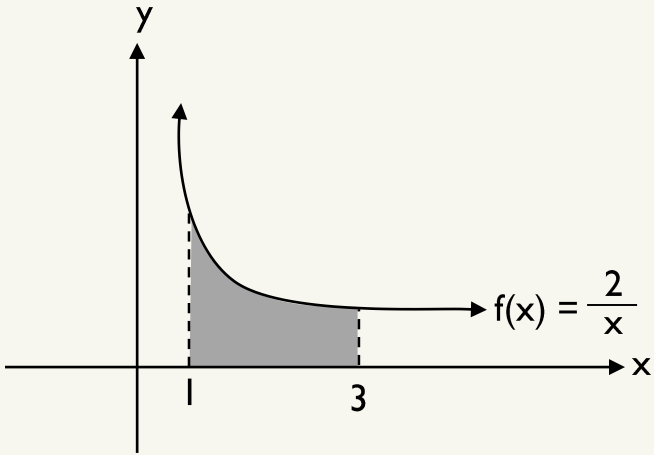
ÖRNEK

Taralı bölgenin alanını bulunuz.



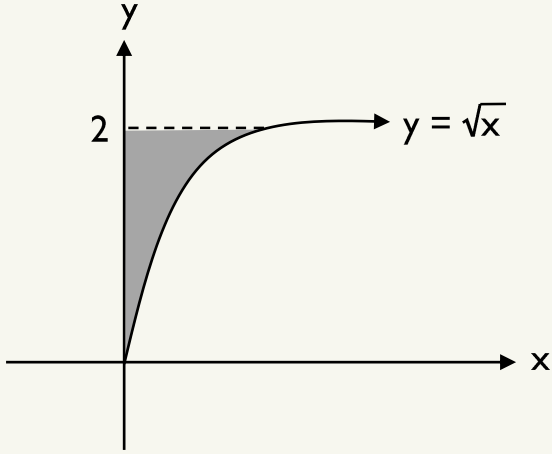
ÖRNEK

Taralı bölgenin alanını bulunuz.



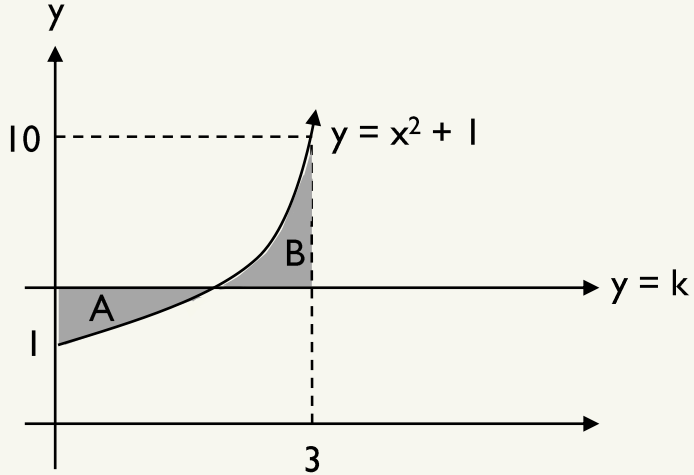
ÖRNEK

Taralı bölgenin alanını bulunuz.



ÖRNEK

Aşağıdaki grafikte, A ve B bölgelerinin alanları eşit olacak şekilde $y = k$ doğrusu verilmiştir. Buna göre, k 'nın değeri kaçtır?

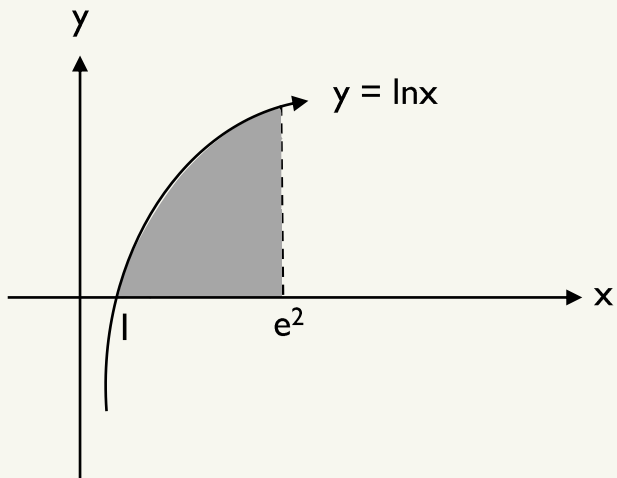


- A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{11}{2}$

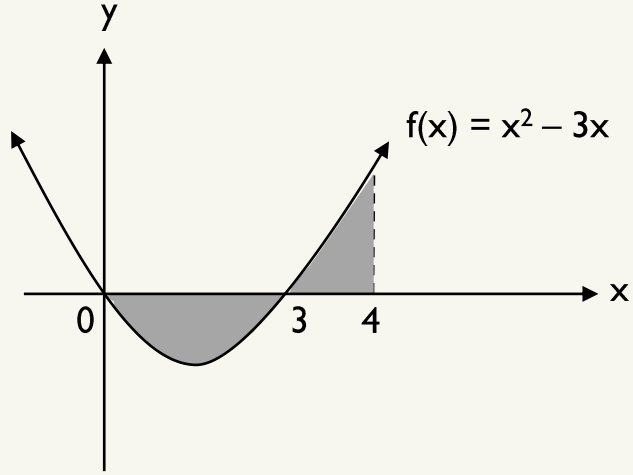
LYS 2011

ÖRNEK

Taralı bölgenin alanını bulunuz.

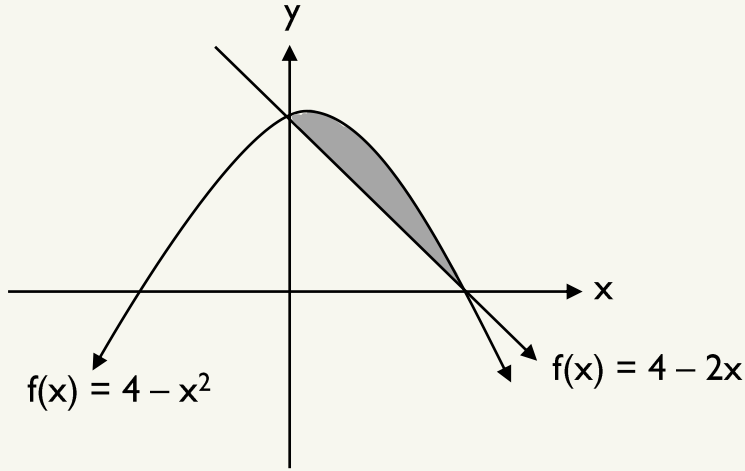


ÖRNEK



Taralı bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

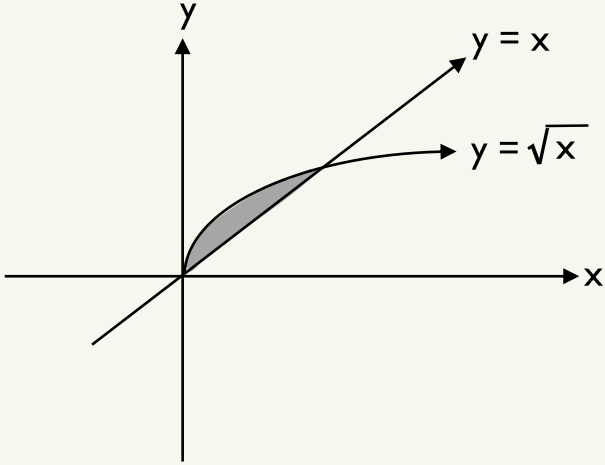


Şekildeki parabol ile doğru arasında kalan taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{9}{4}$

ÖSS 2009

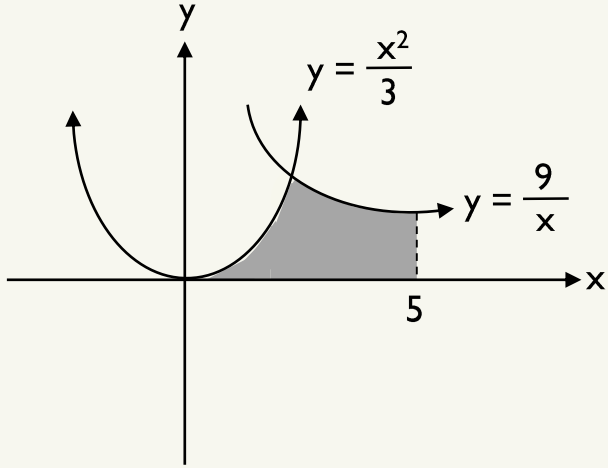
ÖRNEK



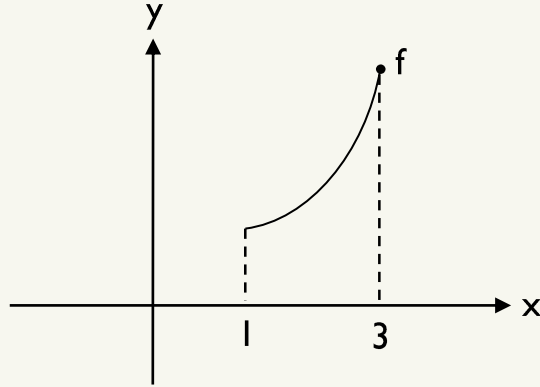
Taralı bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

Taralı bölgenin alanını bulunuz.



ÖRNEK



$$f : [1, 3] \longrightarrow [2, 10]$$

$f(x) = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. $[1, 3]$ aralığı, eşit uzunlukta iki alt aralığa bölünüp bu alt aralıkların sağ uç noktaları x_1 ve x_2 olarak işaretleniyor. Daha sonra her bir alt aralığı taban kabul eden ve yükseklikleri sırasıyla $f(x_1)$, $f(x_2)$ birim olan iki dikdörtgen çiziliyor. Bu dikdörtgenlerin alanları toplamı A ve f fonksiyonu ile x eksenini arasında kalan bölgenin alanı B olduğuna göre, $A - B$ kaç birim karedir?

- A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{13}{3}$ C) $\frac{15}{4}$ D) $\frac{19}{6}$ E) $\frac{23}{6}$

LYS 2013

ÖRNEK

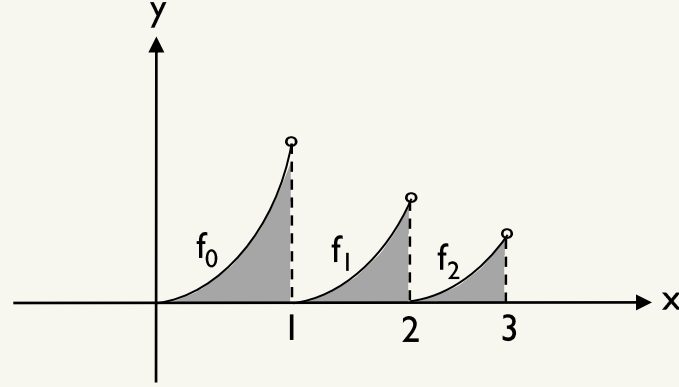
n bir doğal sayı olmak üzere,

$$f_n : [n, n + 1) \longrightarrow \left[0, \frac{1}{2^n}\right)$$

$$f_n(x) = \frac{(x - n)^2}{2^n}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar ile x ekseninde kalan bölgeler şekilde taralı verilmiştir. Buna göre, tüm taralı bölgenin alanları toplamı kaç birim karedir?

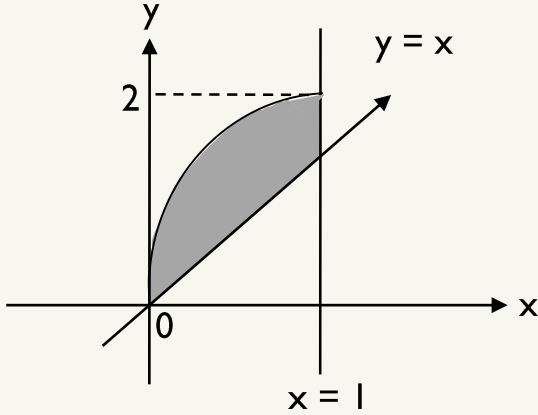
- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{11}{2}$



LYS 2013

ÖRNEK

f fonksiyonu birebir olmak üzere, birinci bölgede $y = x$ ve $x = 1$ doğruları ile $y = f(x)$ eğrisi arasında kalan taralı bölge aşağıda verilmiştir. Taralı bölgenin alanının $f^{-1}(x)$ türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\int_0^2 f^{-1}(x) \cdot dx$

B) $\int_0^2 (2 - f^{-1}(x)) \cdot dx$

C) $\int_0^1 (x - f^{-1}(x)) \cdot dx$

D) $\int_0^1 (2 - f^{-1}(x))dx + \int_1^2 f^{-1}(x)dx$

E) $\int_0^1 (x - f^{-1}(x))dx + \int_1^2 (1 - f^{-1}(x))dx$

LYS 2013

ÖRNEK

$y = x^2$ parabolü ile $y = 6x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $x = 2$ ve $x = 5$ grafikleri arasında kalan kapalı bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

$y = \sqrt{x}$ eğrisi, $y = 1$ ve $y = 3$ doğruları ile y ekseninin oluşturduğu bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

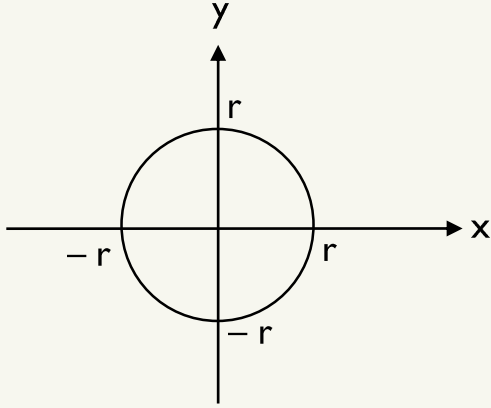
$y^2 = 9 - x$, $x \geq 0$, $y \leq 0$ ve eksenler arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

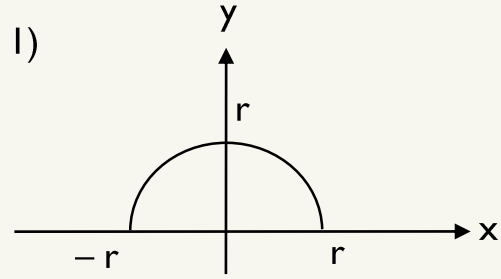
ÖRNEK

$y = x^3 - 9x$ ile x eksenini arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Yarım Çember Denklemi

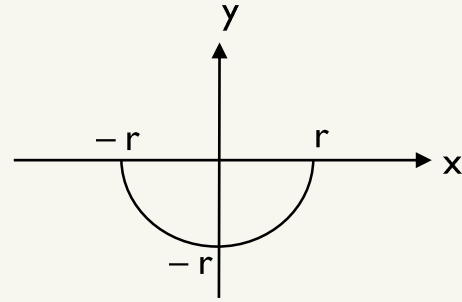
M (0, 0) ve yarıçapı r birim olan çemberin grafiği;





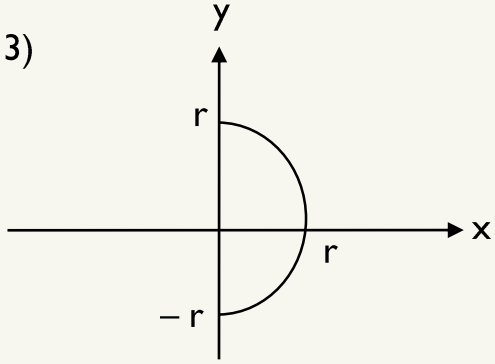
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

2)



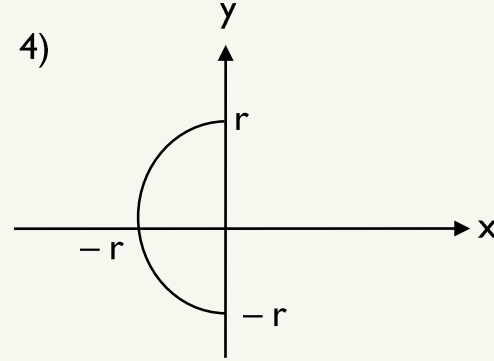
$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

3)



$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

4)



$$x = -\sqrt{r^2 - y^2}$$

ÖRNEK

$$\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} \cdot dx \text{ integralinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_{-3}^0 \sqrt{36 - x^2} \cdot dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_{-8}^0 \sqrt{16 - (x + 4)^2} \cdot dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\int_0^3 \sqrt{9 - (y - 3)^2} \cdot dy$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-x^2} - x) \cdot dx \text{ integralinin değerini bulunuz.}$$

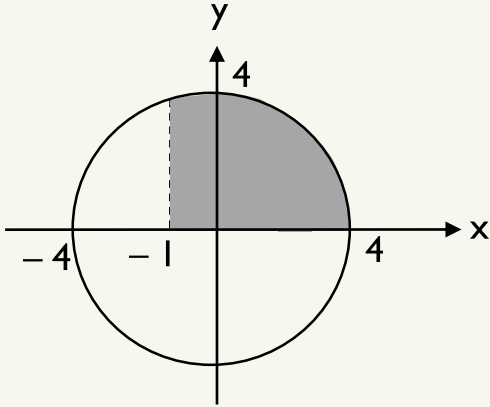
ÖRNEK

$\int_0^3 (\sqrt{9-x^2} - (3-x)) \cdot dx$ integralinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

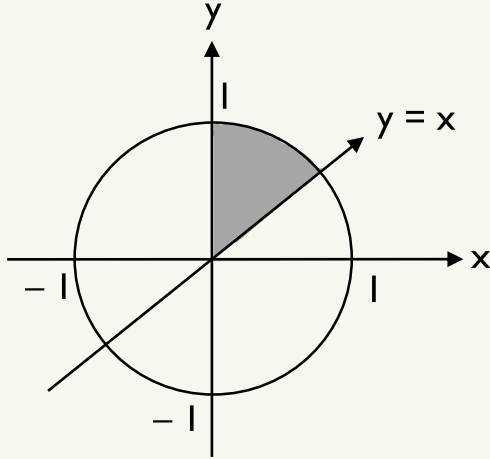
$$\int_0^4 (\sqrt{16-x^2} + x - 4) \cdot dx \text{ integralinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK



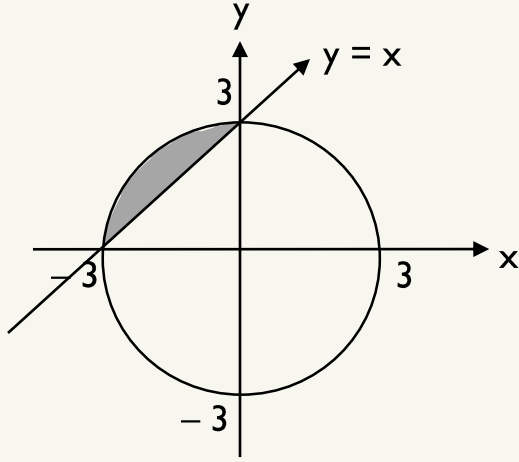
Taralı bölgeyi integral ile ifade ediniz.

ÖRNEK



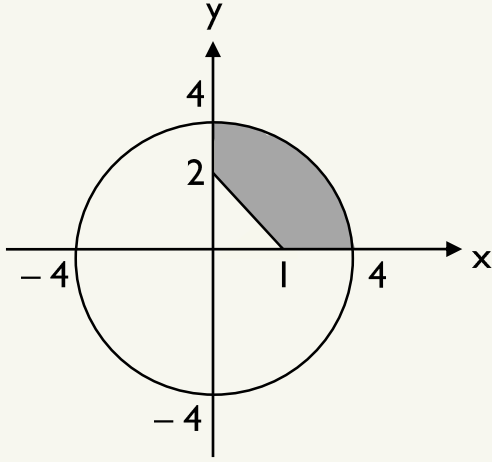
Taralı bölgeyi integral ile ifade ediniz.

ÖRNEK



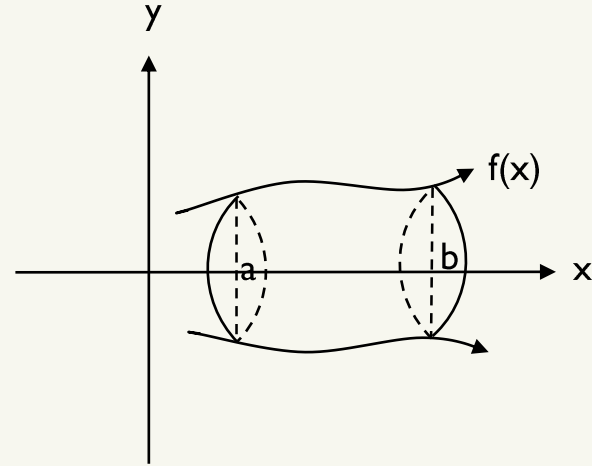
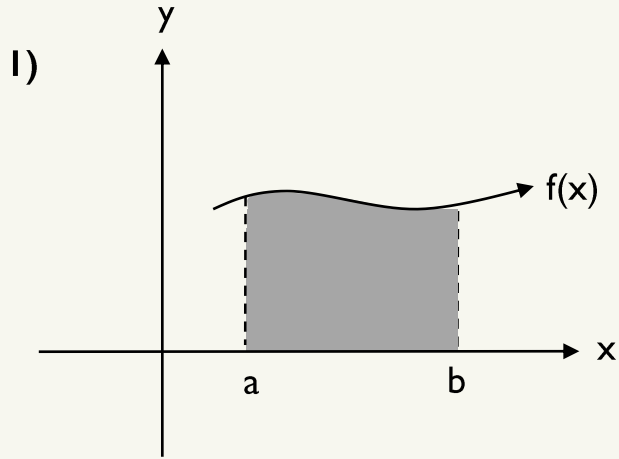
Taralı bölgeyi integral ile ifade ediniz.

ÖRNEK



Taralı bölgeyi integral ile ifade ediniz.

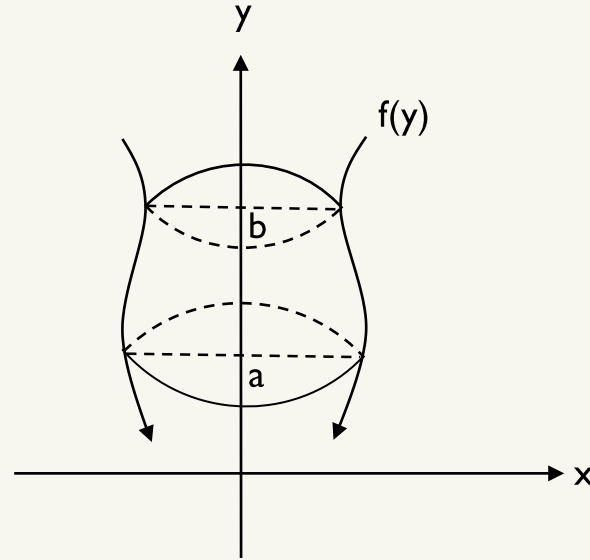
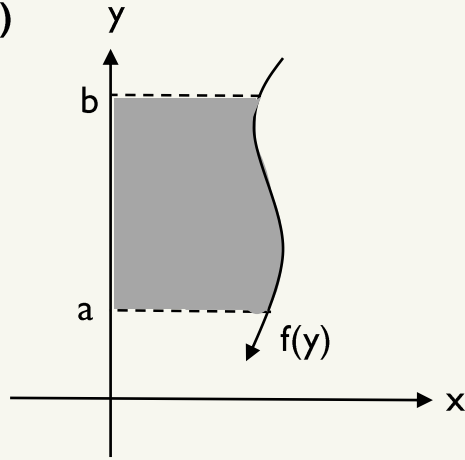
İntegralde Hacim



$f(x)$ fonksiyonunu x eksenini etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

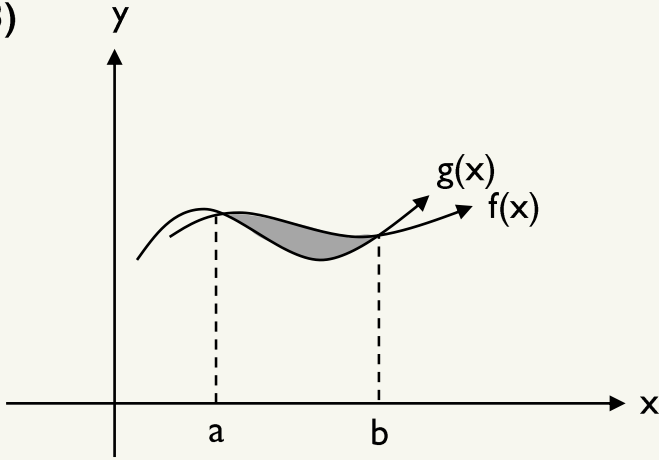
2)



$f(y)$ fonksiyonunu y eksenini etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmi;

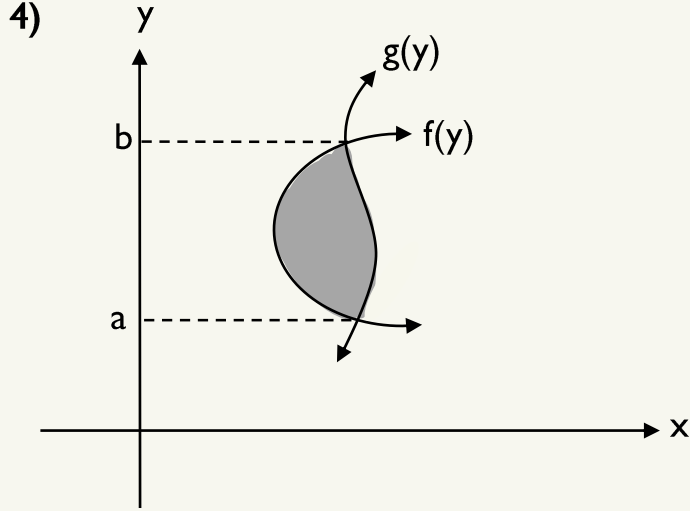
$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(y) \cdot dy$$

3)



$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının arasında kalan bölgeyi x eksenine etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmi;

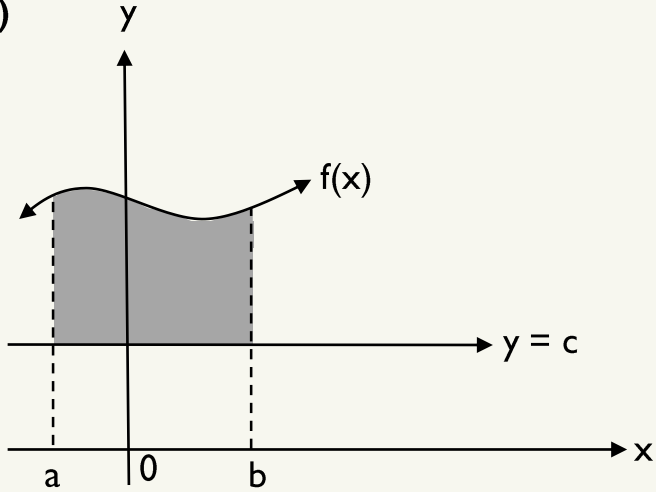
$$V = \pi \cdot \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \cdot dx$$



$f(y)$ ve $g(y)$ fonksiyonlarının arasında kalan bölgeyi y eksenini etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \cdot \int_a^b (g^2(y) - f^2(y)) \cdot dy$$

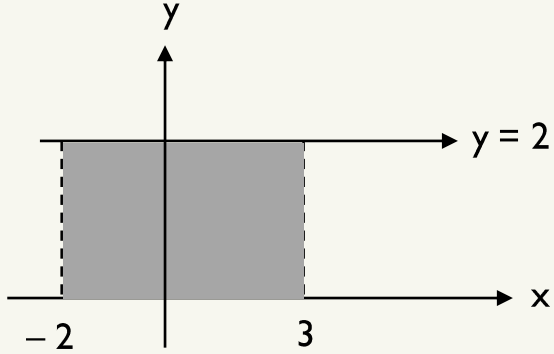
5)



$f(x)$ fonksiyonunun $y = c$ doğrusu ile sınırladığı bölgeyi $y = c$ doğrusu etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmi;

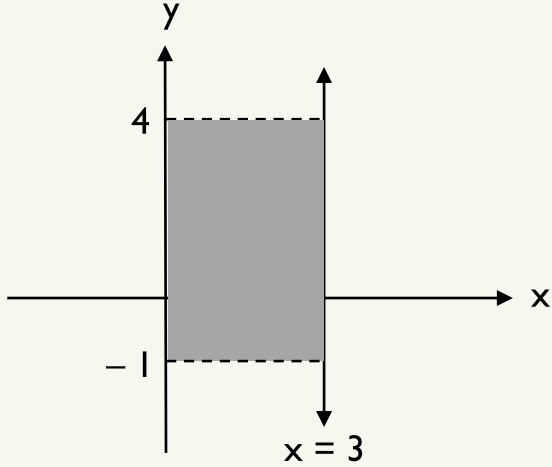
$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x) - c)^2 \cdot dx$$

ÖRNEK



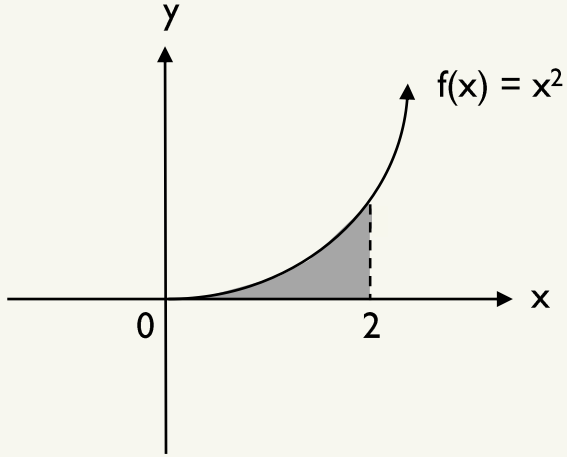
Taralı bölgeyi x ekseninin etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmini integral ile ifade ediniz.

ÖRNEK



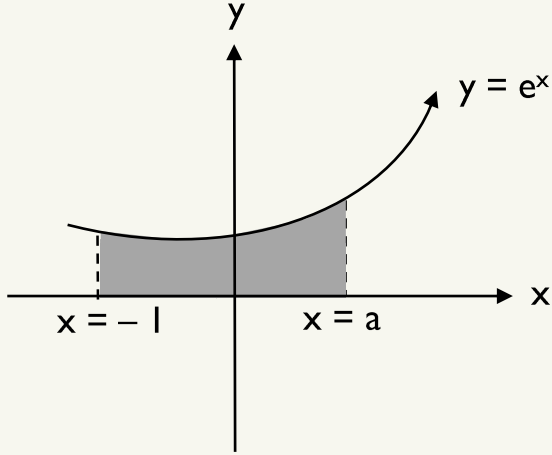
Taralı bölgeyi y ekseninin etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmini integral ile ifade ediniz.

ÖRNEK



Taralı bölgeyi x eksenini etrafında 360° döndürürsek, oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK

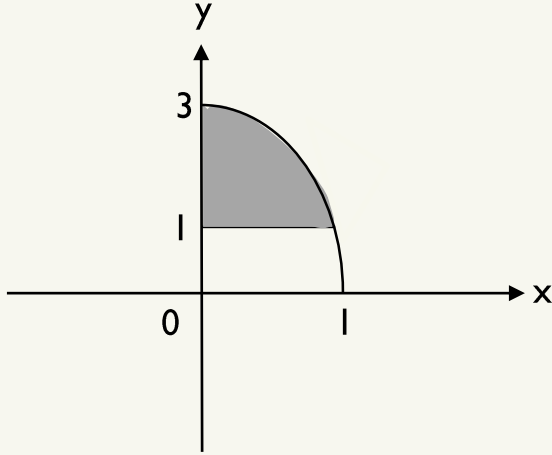


Şekildeki gibi, $y = e^x$ eğrisi ile $x = -1$ ve $x = a$ ve $y = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin x eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi $\frac{\pi}{2} \cdot (e^{10} - e^{-2}) \text{ br}^3$ olduğuna göre a 'nın değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

ÖYS 1996

ÖRNEK



Birinci bölgede; y eksenini, $y = 1$ doğrusu ve $9x^2 + y^2 = 9$ elipsi arasında kalan bölge y eksenini etrafında 360° döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

- A) $\frac{8\pi}{9}$ B) $\frac{10\pi}{9}$ C) $\frac{19\pi}{18}$ D) $\frac{25\pi}{27}$ E) $\frac{28\pi}{27}$

LYS 2012

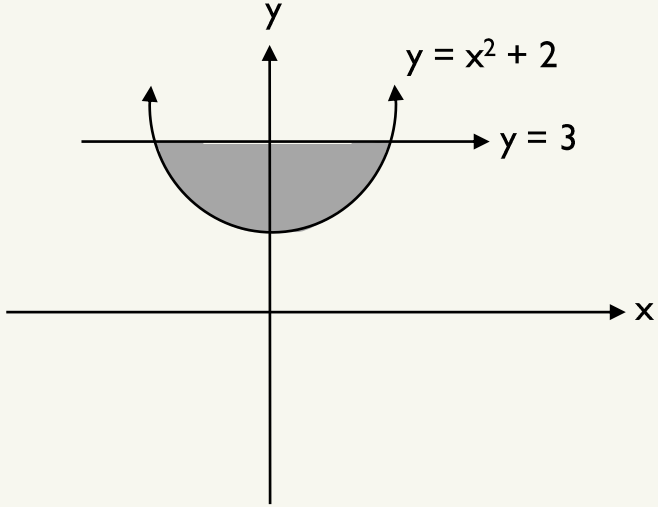
ÖRNEK

$y = \frac{2}{x}$ eğrisi, $x = 1$, $x = 3$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin x eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK

$y^2 = 2x$ eğrisi, $x = 0$ ve $y = 5$ doğruları ile sınırlı bölgenin y eksenini etrafında 90° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK

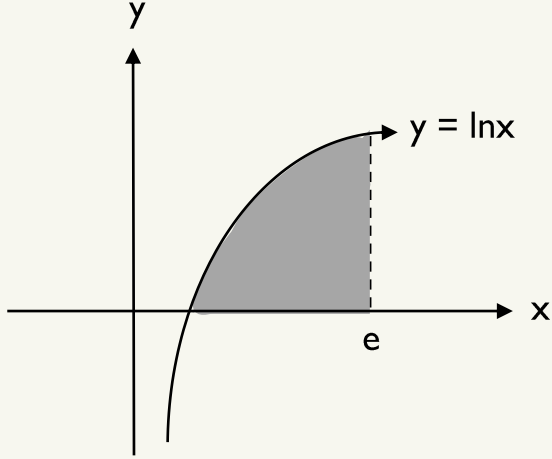


Taralı bölgenin y eksenini etrafında 180° döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^2$ eğrisi, $y = 2 - x$ fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan kapalı bölgenin x eksenine etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK



Taralı bölgeyi y ekseninin etrafında 360° döndürürsek oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^2$ eğrisi, $y = x$ fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan kapalı bölgenin x eksenine etrafında 120° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.