

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT I

İŞLEM

Boş olmayan bir A kümesi alalım. $A \times A$ kümesinden reel sayıların bir alt kümesine tanımlı her fonksiyona **A kümesinde tanımlı ikili işlem** ya da sadece **işlem** denir.

ÖRNEK

Tam sayılar kümesi üzerinde

$$a \Delta b = a - b$$

şeklinde tanımlanan Δ işlemi için $2 \Delta (0 \Delta 3)$ kaçadır?

ÖRNEK

Tam sayılar kümesinde tanımlanan,

$$(a - 2) \Delta (b + 3) = 2a - b$$

işlemine göre $3 \Delta 1$ işleminin sonucu kaçtır?

ÖRNEK

Tam sayılar kümesinde tanımlanan,

$$\frac{4}{a} \Delta \frac{b}{3} = \frac{a}{2} - \frac{6}{b}$$

işlemine göre $4 \Delta 2$ işleminin sonucu kaçtır?

İşlem Özellikleri

Kapalılık: A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x, y \in A$ için,

$$(x \Delta y) \in A$$

ise A kümesi Δ işlemine göre kapalıdır, denir.

ÖRNEK

Doğal sayılar kümesi, bilindik $+$, $-$, $\times$, $\div$ işlemlerinin hangisi veya hangilerine göre kapalıdır?

Değişme Özelliği

A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi, A kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x, y \in A$ kümesi için,

$$x \Delta y = y \Delta x$$

ise Δ işleminin değişme özelliği vardır, denir.

Değişme özelliği için; x görülen yere y, y görülen yere x yazıldığında sonucun değişmemesi gerekir.

Dağılma Özelliği

A boş olmayan bir küme ve Δ ile $\bullet$ işlemleri, A kümesi üzerinde tanımlı işlemler olsun.

Her $x, y, z \in A$ için,

$$x \Delta (y \bullet z) = (x \Delta y) \bullet (x \Delta z)$$

oluyorsa Δ işleminin $\bullet$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır, denir.

Her $x, y, z \in A$ için

$$(y \bullet z) = (y \Delta x) \bullet (z \Delta x)$$

oluyorsa Δ işleminin $\bullet$ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır, denir.

Etkisiz (Birim) Eleman: A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi, A kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun.

Her $x \in A$ için

$$(x \Delta e) = (e \Delta x)$$

olacak şekilde tek bir e sayısı varsa (olmak zorunda değil) e'ye Δ işleminin birim elemanı veya etkisiz eleman denir.

Tanımdaki $x \Delta e = e \Delta x$ eşitliğinde etkisiz eleman olabilmesi için değişme özelliği olması şart değildir. Önemli olan e sayısının bu şartı sağlaması yeterlidir.

Bir işlemin değişme özelliği yoksa etkisiz elemanı yoktur, fakat değişme özelliği olan bütün işlemlerde etkisiz eleman olması zorunlu değildir.

$a \neq 0$ olmak üzere, rasyonel sayılar kümesinde tanımlı,

$$x \Delta y = ax + ay + bxy + c$$

işleminin etkisiz elemanının var olabilmesi için

$$a \cdot (a - 1) = b \cdot c$$

eşitliğinin sağlanması lazımdır. Eğer sağlanırsa $e = \frac{-c}{a}$ olur.

ÖRNEK

$$x \Delta y = x + 2y - 6$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin etkisiz elemanı nedir?

ÖRNEK

$$x \circ y = x + y - 5$$

şeklinde tanımlanan $\circ$ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

ÖRNEK

$$x \heartsuit y = x + y - 3xy$$

şeklinde tanımlanan $\heartsuit$ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

ÖRNEK

$x \Delta y = 3x + by + \alpha xy + b$ biçiminde tanımlanan Δ işleminin birim elemanı -1 olduğuna göre α kaçtır?

ÖRNEK

$$x \Delta y = x + y + xy$$

$x \circ y = (x \Delta y) \Delta 1$ şeklinde tanımlanan Δ ve $\circ$ işlemleri veriliyor. Buna göre $\circ$ işleminin etkisiz elemanı kaçta eşittir?

Ters Eleman

A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A kümesi üzerinde tanımlı, birim elemanı e olan bir işlem olsun.

$x, y \in A$ için,

$$x \Delta y = y \Delta x = e$$

şartını sağlayan tek bir y değeri varsa (olmak zorunda değil), y'ye **Δ işlemine göre x'in tersi** denir ve x^{-1} ile gösterilir.

$$e \Delta e^{-1} = e \text{ olduğunu için } e^{-1} = e$$

Tersi kendisine eşit olan eleman sadece etkisiz eleman değildir. Etkisiz eleman dışında da tersi kendisine eşit elemanlar olabilir.

NOT:

- 1) Bir işlemin etkisiz elemanı yoksa, herhangi bir elemanın tersinden söz edilemez.
- 2) Etkisiz elemanın tersi kendisidir.
- 3) Etkisiz eleman dışında da tersi kendisine eşit olan elemanlar olabilir.

ÖRNEK

$x \Delta y = x + y - 5$ olarak tanımlanan Δ işlemine göre 6'nın tersi kaç olur?

ÖRNEK

$x \heartsuit y = x + y + 3xy$ şeklinde $\mathbb{R}$ 'de tanımlanan $\heartsuit$ işlemine göre 4'ün tersi kaç olmalıdır?

ÖRNEK

Reel sayılarda tanımlı $x \Delta y = x + y - 2m + 3$ işlemine göre 6'nın tersi 4 olduğuna göre, m kaçtır?

ÖRNEK

$x \Delta y = x + y - 2$ olduğuna göre Δ işlemine göre, $5 \Delta 4^{-1}$ işleminin sonucu nedir?

Yutan Eleman

A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A' da tanımlanmış bir işlem olsun. Her $x, y \in A$ için,

$$x \Delta y = y \Delta x = y$$

olacak şekilde tek bir y varsa (olmak zorunda değil), y 'ye Δ işleminin yutan elemanı denir.

NOT:

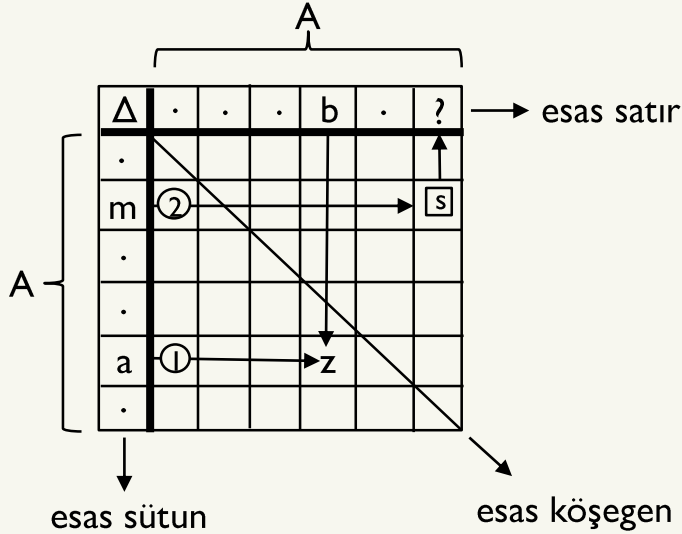
1. Yutan elemanın tersi yoktur.
2. Bir A kümesinin Δ işlemine göre hem etkisiz elemanı hem de yutan elemanı varsa; etkisiz eleman araştırılırken yutan eleman veya yutan eleman araştırılırken de etkisiz eleman bulunur.
3. Tabloda bir satır ile sütun, esas satır ve esas sütundan itibaren aynı elemandan meydana geliyorsa, bu eleman **yutan elemandır**.

ÖRNEK

$x \Delta y = 5xy$ işleminin yutan elmanı kaçtır?

Tablo

A da bir $a \Delta b$ nin değeri tablodan,



1) (a, b) ikilisinin birinci bileşeni (a) esas sütundan, ikinci bileşeni (b) de esas satırdan alınarak işlemin sonucu (z) bulunur.

2) $m \Delta n = s$ eşitliğinde m ve s biliniyor, n araştırılıyorsa $(n = ?)$; m birinci bileşen olduğundan esas sütundan işlemin sonucuna (s) gidilip esas satıra dikme çıkılarak bulunur.

$\forall x, y \in A$ için, $x \Delta y = y \Delta x$ oluyorsa, Δ işleminin değişme özelliği vardır. İşlem tablosunda, elemanlar esas köşegene göre simetrik ise bu işlemin değişme özelliği vardır.

Δ işleminin tablosunda, esas satır ile esas sütunun aynısı olan satır ve sütunun kesiştiği yerdeki eleman etkisiz elemandır.

Grup

Boş olmayan bir A kümesinde tanımlı $\star$ işlemi için,

1. A kümesi $\star$ işlemine göre kapalı ise,
2. $\star$ işleminin birleşme özelliği varsa,
3. A kümesinin $\star$ işlemine göre etkisiz (birim) elemanı varsa,
4. A kümesindeki her elemanın $\star$ işlemine göre tersi varsa, $(A, \star)$ sistemi grup, $\star$ işleminin değişme özelliği de varsa $(A, \star)$ sistemi **değişmeli gruptur**.

NOT: $(A, \star)$ sistemi grup ise $\star$ işleminin tablosunda, herhangi bir satırda veya herhangi bir sütunda bir eleman sadece bir kez bulunur.

ÖRNEK

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	.	1	e
b	b	.	2	.
c	c	.	.	.

1 ve 2 numaralı gözlerde bulunması gereken elemanlar sırasıyla ne olmalıdır?

ÖRNEK

Δ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Yandaki tablo $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir. Buna göre,

Değişme özelliği $\longrightarrow$

Etkisiz elemanı $\longrightarrow$

Yutan elemanı $\longrightarrow$

$(3 \Delta 4) \longrightarrow$

ÖRNEK

Δ	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

Yandaki tablo $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir. Δ işlemine göre,

Değişme özelliği $\rightarrow$

Etkisiz elemanı $\rightarrow$

$(3 \Delta 2) \rightarrow$

Yutan elemanı $\rightarrow$

ÖRNEK

o	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Yandaki tablo $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanmış $\circ$ işlemine aittir. $3 \circ 4 = x$

olduğuna göre $(x \circ 4)^{-1}$ kaçtır?

ÖRNEK

Δ	0	1	2	3	4
0	3	4	0	1	2
1	4	0	1	2	3
2	0	1	2	3	4
3	1	2	3	4	0
4	2	3	4	0	1

Yandaki tablo $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir.

$x^y = \underbrace{x \Delta x \Delta \dots \Delta x}_{y \text{ tane } x}$ olduğuna göre $2^3 \Delta 4^2$ işleminin sonucu kaçtır?