

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT I

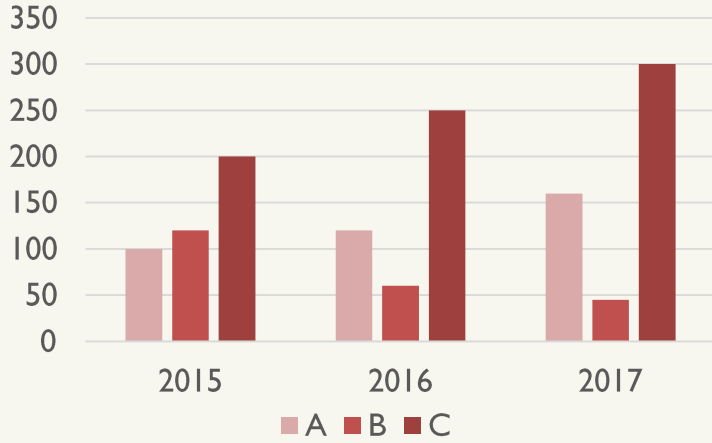
İSTATİSTİK

Araştırma yapılarak verilerin toplanması, toplanan verilerin analiz edilmesi ile ilgili yöntem ve teknikleri inceleyen bilim dalına **istatistik** denir.

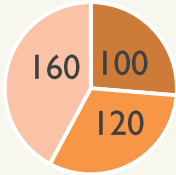
ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda A, B ve C şirketlerinin yıllara göre ciroları verilmiştir.

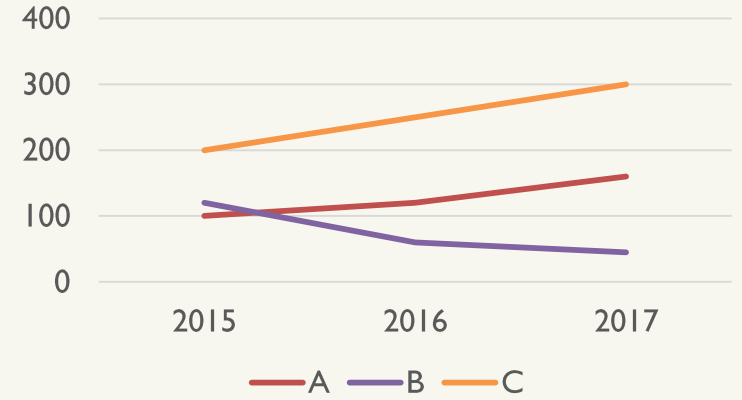
Yıl \ Şirket	A	B	C
2015	100	120	200
2016	120	60	250
2017	160	45	300



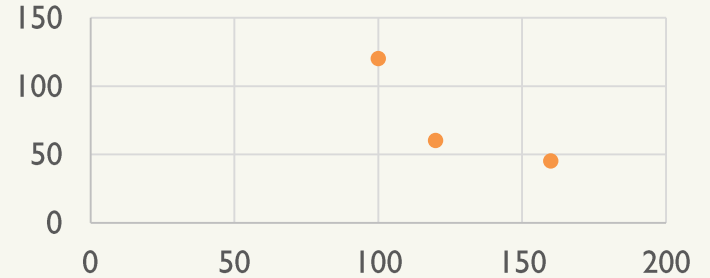
A



■ 2015 ■ 2016 ■ 2017



B



Ölçme Sonuçları Üzerindeki İstatistik İşlemler

Yapılan sınavlardaki puanlar verildikten sonra, önce puanlar sıraya konur. Daha sonra merkezi eğilim ölçüleri aritmetik ortalama, mod (tepe değer), medyan (ortanca) bulunur. Daha sonra ranj (açıklık) ve standart sapmayı bulup yorumlar yapabiliriz.



Merkezi Eğilim (Yığılma) Ölçüleri

Merkezi eğilim ölçüleri, dağılımdaki verilerin hangi puan etrafında toplandığı hakkında bilgi verir.

I- Aritmetik Ortalama

Ölçümlerin toplamının ölçüm sayısına bölünmesiyle elde edilir. Aritmetik ortalama, bir dizideki ölçülerin ağırlık merkezidir.

$$\text{Aritmetik ortalama} = \frac{\text{Ölçümlerin toplamı}}{\text{Ölçüm sayısı}}$$

Aritmetik ortalamayı veren formül:

$\bar{x}$: Aritmetik ortalama

$\sum x$: Ölçümlerin toplamı

n: Ölçüm sayısı

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Aritmetik ortalama ile;

- Grubun ortalama başarı düzeyi,
- Grubun genel başarı düzeyi,
- Grubun ağırlık merkezi,
- Testin ortalama güçlük düzeyi,
- Uygulanan program ve öğretmenin etkinliği hakkında yorumlar yapabiliriz.
- Verilerin tamamı dikkate alınarak hesaplanan aritmetik ortalama, verilerin bir ya da birkaçı hesaplanarak elde edilen mod ve medyana göre daha fazla bilgi taşır.

ÖRNEK

Bir öğrencinin geometri dersindeki dört sınavdan aldığı puanların aritmetik ortalaması 72'dir. Bu öğrenci, sınavların birinden 78 aldığına göre, diğer üç sınavdan aldığı puanların ortalaması kaçtır?

2- Ağırlıklı Ortalama

Puanlara farklı ağırlıklar (krediler) verilerek hesaplanır. Ağırlıklı ortalama bulunurken her bir dersten alınan puan, kredisiyle çarpılarak elde edilen çarpımlar toplanır ve bulunan sonuç, bütün derslerin kredileri toplamına bölünür.

Frekans: Bir ölçme işleminde bir puanın kaç öğrenci tarafından alındığını ya da bir ölçümün kaç tane olduğunu gösteren sayıdır. Örneğin; bir sınavda 80 puan alan 5 öğrenci, 70 puan alan 3 öğrenci varsa, 80'in frekansı 5 ve 70'in frekansı 3'tür.

3- Mod (Tepe Değer)

Ölçümlerde en çok tekrarlanan değerdir. Başka bir ifadeyle frekansı en yüksek olan değerdir.

ÖRNEK

Kerem'in girdiği 10 sınavın sonuçları aşağıda verilmiştir.

20, 65, 20, 21, 33, 71, 19, 44, 20, 10

Buna göre, bu veri grubunun tepe değeri kaçtır?

Frekans Dağılımına Göre Mod Bulma: Bir dağılımda bütün puanların frekansı aynı ise bu dağılımın modu yoktur.

- Bir dağılımda en fazla tekrarlanan frekans art arda geliyorsa bu dağılımın modu iki değer toplamının yarısıdır.

4- Medyan (Ortanca)

Küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe doğru sıralanmış bir dağılımı tam ortadan ikiye bölen değerdir. Ölçümlerin yarısı bu değer üstünde, diğer yarısı bu değerin altında yer alır.

- Ortanca, bir puan dağılımındaki uç değerden ve bu değerlerin büyüklük ve küçüklüklerinden etkilenmez. Örneğin; 10, 20, 45 şeklinde olan bir dağılımda ortanca 20'dir. 15, 20, 90 şeklinde olan bir dağılımın da ortancası 20'dir. İkisinde de ortanca 20 ama uç değerler farklıdır.
- Aritmetik ortalama, medyan ve moda göre, bize grup hakkında daha çok bilgi verir. Çünkü ortalama bulunurken verilerin tamamı işleme katılır; medyan bulunurken verilerin yarısı, mod bulunurken verilerin bir veya birkaçı işleme katılır. Grup hakkında bize en çok bilgi verenden en az bilgi verene doğru sırasıyla; aritmetik ortalama, medyan ve mod diyebiliriz.
- Ortalama, uç (en büyük – en küçük) değerlerden etkilenir. Medyan, uç değerlerden etkilenmez. Uç değerler çok büyük ya da çok küçük olsa da medyan yine ortanca terimdir. Mod en çok tekrar eden değer olduğundan uç değerlerden etkilenmez.

ÖRNEK

Puan	1	2	3	4	5
Öğrenci sayısı	3	1	2	3	2

Yukarıdaki tabloda bir sınıftaki öğrencilerin fizik sınavından aldıkları puanların dağılımı gösterilmiştir. Buna göre, sınıfın bu sınavdaki puanlarının ortanca (medyan) değeri kaçtır?

Merkezi Dağılım (Yayılma) Ölçüleri

Yayılma ölçüleri, ölçümlerin homojenliğini ya da heterojenliğini veya ölçümlerin ortalamadan ne kadar uzaklara yayıldığı, ölçme sonuçlarının merkezi eğilim ölçüleri etrafında nasıl bir dağılım gösterdiği hakkında bilgi verir.

I- Ranj (Açıklık)

Dağılımdaki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farktır. Ranj (açıklık değeri) bir puan dağılımında en küçük ve en büyük ölçme sonucu, yani uç değerler tarafından belirlendiği için kabaca bir hesaplama olduğundan kullanışsız bir ölçüdür.

2- Alt Çeyrek, Üst Çeyrek, Çeyrekler Açıklığı

Küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe doğru sıralanmış bir dağılımda en küçük değer ile ortanca değerin ortasındaki değere **alt çeyrek**, en büyük değer ile ortanca değerin ortasındaki değere **üst çeyrek** denir. Alt çeyrek ile üst çeyrek değerlerinin arasındaki farka **çeyrekler açıklığı** denir.

- Çeyrekler açıklığı uç değerlerden az etkilendiğinden, grubun verilerin yayılması hakkında ranja göre daha iyi sonuç verir.

ÖRNEK

24	16	x	15	18	40
----	----	---	----	----	----

Yukarıda verilen sayı dizisinin açıklığı 30 olduğuna göre, x'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

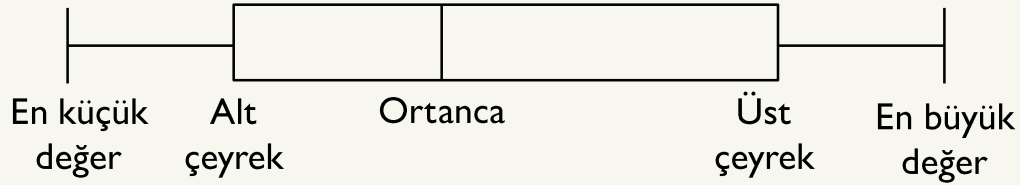
ÖRNEK

Harçlık (TL)	6	2	3	4	10	8	6
--------------	---	---	---	---	----	---	---

Yukarıdaki tabloda bir gruptaki öğrencilerin aldıkları harçlık miktarı gösterilmiştir. Buna göre, bu grubun alt çeyrek ve üst çeyrek değerlerini bulalım.

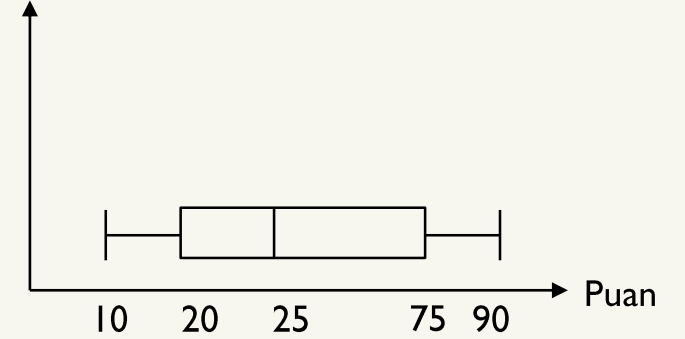
Kutu Grafiği

Kutu grafiği, bir veri grubundan elde edilen en küçük değer, en büyük değer, üst çeyrek ve ortanca değerlerini içeren bir grafikdir. Bu istatistiki bilgiler aşağıdaki gibi gösterilir.



ÖRNEK

10 – C sınıfının kimya sınavından aldığı puanlarla ilgili bir veri grubu hazırlanıyor ve bu veriler kullanılarak aşağıdaki kutu grafiği çiziliyor. Bu veri grubu ile ilgili;



3- Standart Sapma ve Varyans

Grup içindeki farklılaşma düzeyini gösteren değerlerdir. Verilerin aritmetik ortalamadan uzaklıklarının bir ölçüsüdür.

Standart sapmanın büyük çıkması öğrenciler arasında değişkenliğin fazla olduğu, uygulanan testin bilen ve bilmeyen öğrenciyi ayırt etme gücünün yüksek olduğu anlamına gelir. Bir grubun başarısını sadece aritmetik ortalama ile belirleyemeyiz. Aritmetik ortalama öğrencilerin başarısı hakkında bilgi verir; ama öğrencilerin puanlarının aritmetik ortalama etrafındaki yayılmaları farklı olabilir. Standart sapma, öğrencilerin aritmetik ortalamadan ne kadar uzaklaştığını belirler.

Standart sapma şu şekilde bulunur:

- 1) Puanların aritmetik ortalaması bulunur.
- 2) Her bir puanın aritmetik ortalamadan farkı bulunup bu farkların karesi alınır ve bulunan değerler toplanır.
- 3) Bulunan değer, öğrenci sayısının 1 eksiğine bölünüp karekökü alınır.

S_x = standart sapma

n = öğrenci sayısı

$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$: Bütün puanların aritmetik ortalamadan farklarının kareleri toplamı

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

NOT: Varyans = (standart sapma)² olduğundan standart sapma için yapılan yorumlar, varyans için de geçerlidir.

	Standart Sapma Küçük ise	Standart Sapma Büyük ise
Öğrenci Grubu	Homojen	Heterojen
Öğrencilerin Öğrenme Düzeyleri	Benzer	Farklı
Elde Edilen Puanlar Birbirlerine	Yakın	Uzak
Öğrenciler Arası Farklılaşma	Az	Çok
Puanlar Aritmetik Ortalamaya	Yakın	Uzak
Uygulanan Testin Ayırt Ediciliği	Düşük	Yüksek
Bilen Öğrenciler ile Bilmeyen Öğrencileri Birbirinden	Ayırmamış	Ayrırmış

ÖRNEK

	Selin	Ecem	Meniz	Begüm
Süre (sn)	19	21	15	17

Yukarıdaki tabloda 4 koşucunun bir yarışı bitirme süreleri verilmiştir. Buna göre, bu değerlerin standart sapması kaçtır?

ÖRNEK

Aşağıdaki veri gruplarından hangisinin standart sapması 0'dır?

- A) 10, 11, 12
- B) 3, 5, 4, 2, 5
- C) 12, 12, 12, 12, 12
- D) 1, 5, 3, 7, 9, 10
- E) 4, 7, 10, 13, 16

Z Puanı

Öğrenme düzeyinin seviyesini ölçer. Öğrencilerin başarı düzeyleri karşılaştırılırken Z puanlarına bakılır. Z puanı yüksek olanların öğrenme düzeyi, Z puanı düşük olanların öğrenme düzeyinden daha yüksektir.

Z puanı, öğrencilerin puanlarının sınıf ortalamasından kaç tane standart sapma uzakta olduğunu gösterir.

Z puanıyla ham puanlar; ortalaması 0, standart sapması 1 puan olan puanlara dönüştürülmektedir.

$$Z \text{ puanı} = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Öğrencinin} \\ \text{puanı} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Sınıftaki öğrencilerin puanlarının} \\ \text{aritmetik ortalaması} \end{array} \right)}{\text{Standart sapma}}$$

x: Öğrencinin puanı

$\bar{x}$: Aritmetik ortalama

S_x : Standart sapma

$$Z \text{ puanı: } \frac{x - \bar{x}}{S_x}$$

Herhangi bir kişinin almış olduğu ham puanı Z puanına dönüştürerek, verilen bir puanın standart sapmaya göre ortalamanın ne kadar altında veya üstünde kaldığı belirlenebilir. Z puanlarının negatif, sıfır veya pozitif çıkması muhtemeldir.

ÖRNEK

Bir öğrenci grubuna uygulanan sınavlardan elde edilen istatistiksel bilgiler yandaki tabloda verilmiştir.

Bütün derslerden 92 alan Murat'ın en başarısız olduğu ders hangisidir?

Dersler	Grubun aritmetik ortalaması	Grubun standart sapması
A	75	10
B	82	8
C	90	12
D	74	15
E	65	10

ÖRNEK

B dersinden 70 alan Ruhi'nin bu dersteki Z standart puanı kaçtır?

Dersler	Grubun aritmetik ortalaması	Grubun standart sapması
A	75	10
B	82	8
C	90	12
D	74	15
E	65	10

ÖRNEK

A dersindeki Z standart puanı 2 olan bir öğrencinin bu dersten aldığı puan kaçtır?

Dersler	Grubun aritmetik ortalaması	Grubun standart sapması
A	75	10
B	82	8
C	90	12
D	74	15
E	65	10

T Puanı

Z puanı kullanıldığında sonuç bazen negatif, bazen de kesirli çıkabilir. Bundan ötürü yorumlanması daha kolay olsun diye Z puanı T puanına dönüştürülür.

T puanıyla ham puanlar; ortalaması 50, standart sapması 10 olan puanlara dönüştürülmektedir.

T puanı, Z puanından elde edilir ve aynı şekilde yorumlanır.

$$T \text{ puanı} = 50 + 10 \cdot Z$$

ÖRNEK

Bir okuldaki 12. sınıf öğrencilerinin gelişimini izlemek amacıyla 80'er maddelik çoktan seçmeli üç test uygulanmıştır. Bu testler ocak ayından itibaren her ay okuldaki tüm öğrencilere uygulanmıştır.

Yandaki tabloda, Zarife'nin bu testlerdeki doğru cevap sayıları ve T standart puanları verilmiştir.

Şubat ayındaki testin standart sapması 10 olduğuna göre, 12. sınıf öğrencilerinin bu testteki doğru cevap sayılarının ortalaması kaçtır?

	Ocak	Şubat	Mart
Doğru cevap sayısı	74	60	75
T puanı	55	65	40

ÖRNEK

Şubat ayında uygulanan testte 12. sınıf öğrencilerinin doğru cevap sayılarının ortalaması 80 olduğuna göre, bu testin standart sapması kaçtır?

	Ocak	Şubat	Mart
Doğru cevap sayısı	74	60	75
T puanı	55	65	40

ÖRNEK

Ocak ayında uygulanan testin standart sapması 10 olduğuna göre, bu testten 65 soruyu doğru cevaplayan Fatih'in T standart puanı kaçtır?

	Ocak	Şubat	Mart
Doğru cevap sayısı	74	60	75
T puanı	55	65	40

Değişken

Gözlemden gözleme, ölçümden ölçüme değişik değerler alabilen olaylara, insanlara ve nesnelere ilişkin özelliklerdir. Örneğin; insanların kilosu, öğrencilerin not durumu birer değişkendir.

Değişken Türleri

Nicel Değişken: Sayısal olarak açıklanan özelliklerdir. Örneğin; insan sayısı, kişilerin boyları.

Nitel Değişken: Semboller ya da sıfatlarla açıklanan özelliklerdir. Örneğin; bir insanın medeni durumu, cinsiyeti.

Sürekli Değişken: İki değer arasında sonsuz sayıda değer alabilen değişkendir. Örneğin; insanların boyları.

170 cm ile 171 cm arasında sonsuz sayıda ondalıklı sayılar bulunur.

Süreksiz Değişken: İki değer arasında sınırlı sayıda değer alabilen değişkenlerdir. Örneğin; kardeş sayısı.

3 kardeş ile 5 kardeş arasında sadece 4,5 ve 6 kardeş vardır. 6,2 kardeş olamaz.

Bağımlı Değişken: Başka değişken ya da değişkenlere bağlı değişkenlerdir.

Bağımsız Değişken: Başka bir değişkene bağlı olmadan değerler alabilen değişkenlerdir.

Ders çalışmanın başarılı olma üzerindeki etkisi örneğinde;

- Ders çalışma artarsa başarı artar.
- Ders çalışma azalırsa başarı azalır.

Bu örnekte ders çalışma bağımsız değişken, başarılı olma bağımlı değişkendir. Çünkü başarılı olmak ders çalışmaya bağlıdır.

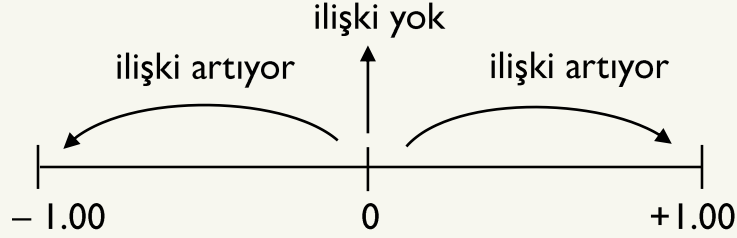
Korelasyon

Değişkenler arasındaki ilişkinin sayısal değeridir. Değişkenler arasındaki ilişki korelasyon katsayısı ile gösterilir. Korelasyon katsayısı -1.00 ile $+1.00$ arasında değişen değerler alır.

Pozitif (Doğrusal) İlişki: Korelasyonun katsayısı $+1$ 'e yaklaştığında korelasyon yükselir. Değişkenlerin her ikisi de artar ya da değişkenlerin her ikisi de azalır. Örneğin; ders çalıştıkça öğrencinin başarısının artması, ders çalışmadıkça öğrencinin başarısının azalması.

Negatif İlişki: Korelasyon katsayısı -1 'e yaklaştıkça korelasyon yükselir. Değişkenlerin birisi artarken, diğeri azalan bir ilişkidir. Örneğin; spor yaptıkça hastalıklara yakalanma riskinin azalması.

İlişkisizlik: Korelasyon katsayısının 0 olmasıdır. Yani, iki değişken arasında ilişkinin olmamasıdır. Örneğin; insanın boyu uzadıkça zekası artar.



Yukarıda korelasyon değerleri ile ilişki düzeyi arasındaki ilişki gösterilmiştir.

- Korelasyon, ilişkinin varlığı ve yönü hakkında bilgi verir, içeriği hakkında bilgi vermez.