



MAT 2

KARMAŞIK SAYILAR

Sanal Sayı Birimi

$x - 2 = 0$, $3x + 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$ denkleminin her birinin çözüm kümelerini bulmayı daha önceki yıllarda öğrendiniz. Bunları tekrar hatırlayacak olursak;

- $x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow \mathcal{C} = \{ 2 \}$
- $3x + 1 = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{3} \longrightarrow \mathcal{C} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$
- $x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Yukarıdaki çözümlerde de görüldüğü gibi; verilen denklemlerin her birinin reel sayılardaki çözüm kümeleri boş kümeden farklı birer kümedir.

Şimdi de $x^2 + 1 = 0$ denkleminin reel sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulmaya çalışalım.

$$x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x^2 = -1 \text{ olur.}$$

Reel sayılar kümesinde karesi -1 'e eşit olan bir sayı bulunmadığından $x^2 + 1 = 0$ denkleminin (reel sayılar kümesindeki) çözüm kümesi boş kümedir. Ünlü matematikçi Euler şu tanıımı yaparak bu tür denklemlerin çözülmesini sağlamıştır:

Karesi -1 olan sayıya sanal (imajiner) sayı birimi denir ve i ile gösterilir. Yani $i^2 = -1$ veya $i = \sqrt{-1}$ dir.

Bu tanımdan yararlanarak $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4 = 0$ gibi denklemleri çözebiliriz.

- $x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x^2 - (-1) = 0 \quad x^2 - i^2 = 0 \longrightarrow (x - i)(x + i) = 0 \longrightarrow x = i \text{ ve } x = -i \text{ dir.}$

m pozitif bir gerçektek sayı olmak üzere, $\sqrt{-m} = i\sqrt{m}$ dir.

$$\sqrt{-4} = 2i, \quad \sqrt{-9} = 3i, \quad \sqrt{-12} = 2\sqrt{3}i, \quad \sqrt{-16} = 4i \text{ dir.}$$

i'nin (Sanal Birimin) Kuvvetleri

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$i^8 = (i^4)^2 = 1$$

Yanda elde ettiğimiz sonuçlara göre, i'nin tam sayı kuvvetlerinde i, -1, -i, 1 dörtlüsünün tekrarlandığını görürüz. Bu durum, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$i^k = \begin{cases} 1, & k = 4n \\ i, & k = 4n + 1 \\ -1, & k = 4n + 2 \\ -i, & k = 4n + 3 \end{cases}$$

biçiminde ya da kısaca $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$i^{4n+m} = i^m$ biçiminde gösterilir.

Karmaşık Sayılar

$i^2 = -1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a + bi$ biçiminde ifade edilen sayılara karmaşık (kompleks) sayılar denir.

Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve $\mathbb{C} = \{z: z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$ dir.

$z = a + bi$ yazılışına karmaşık sayının standart yazılışı denir.

a 'ya karmaşık sayının reel kısmı denir ve $\text{Re}(z) = a$ olarak gösterilir.

b 'ye karmaşık sayının sanal (imajiner) kısmı denir ve $\text{Im}(z) = b$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$Z = i^{71} + i^{2000} + i^{146}$ olduğuna göre $\text{Re}(Z)$ 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$P(x) = 2x^{121} - 3x^{90} + 2x^{65} - x^{44} + x^{30}$ polinomunun $x - i$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$\sum_{n=1}^{50} i^n$ toplamının sonucunu bulunuz.

İki Karmaşık Sayının Eşitliği

İki karmaşık sayının eşit olabilmesi için reel ve sanal kısımlarının ayrı ayrı birbirine eşit olması gerekir.

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array} \right\} \text{verildiğinde}$$

$$z_1 = z_2 \longrightarrow a = c \text{ ve } b = d \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$(1 + i) \cdot Z - 3 + i = 1 - i$ olduğuna göre Z 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$Z - 3i = (2 - i) \cdot Z$ ise Z 'yi bulunuz.

ÖRNEK

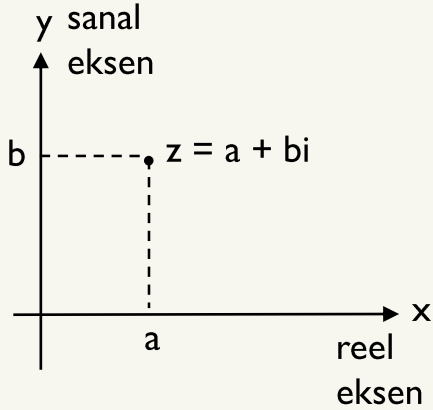
$\bar{Z} + 1 + i = 2 \cdot Z - 2i$ ise Z 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$2i.Z + 3\bar{Z} = 6 - i$ ise Z 'yi bulunuz.

Karmaşık Düzlem

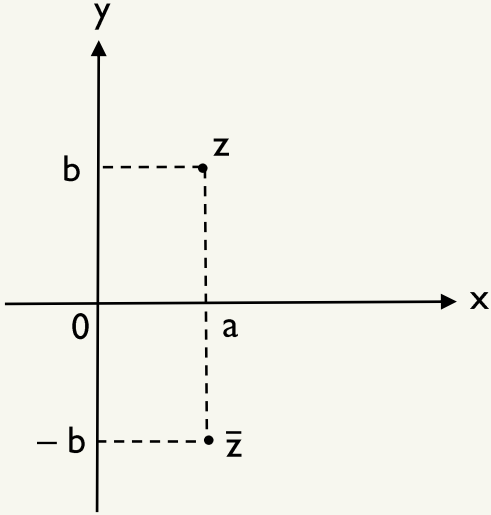
Karmaşık sayıların, analitik düzlemin noktalarıyla birebir eşlenmesi ile oluşturulan düzleme karmaşık düzlem denir.



x eksenine karmaşık düzlemin reel ekseni, y eksenine de karmaşık düzlemin sanal ekseni denir.

Bir Karmaşık Sayının Eşleniği

$Z = a + bi$ 'nin reel eksene göre simetriği olan $a - bi$ sayısına Z 'nin eşleniği denir. $\bar{Z} = a - bi$ biçiminde gösterilir.



Bir karmaşık sayı ile eşleniği, reel eksene göre simetriktir.

- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}$

İkinci Dereceden Bir Denklemin Sanal Köklerini Bulmak

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözerken,

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ ve } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ olmak üzere;}$$

- $\Delta > 0$ ise denklemin farkı iki gerçel kökünün,
- $\Delta = 0$ ise denklemin eşit iki gerçel kökünün,
- $\Delta < 0$ ise denkleminin gerçel kökünün bulunmadığını biliyoruz. İşte, $\Delta < 0$ durumunda denklemin sanal iki kökü vardır.

NOT:

Reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemde $\Delta < 0$ iken kökler birbirinin eşleniğidir.

ÖRNEK

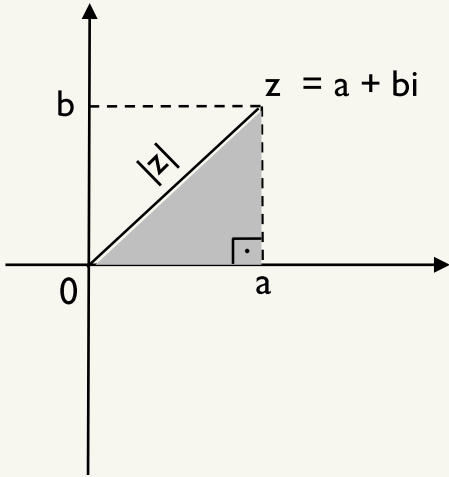
$x^2 - 4x + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Bir Karmaşık Sayının Mutlak Değeri (Modülü)

Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığına bu karmaşık sayının mutlak değeri veya modülü denir ve $|z|$ biçiminde gösterilir.



Grafikte görüldüğü gibi,

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dir.}$$

Mutlak Değerle İlgili Özellikler

- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| = |-iz| = |iz|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} , \quad (z_2 \neq 0)$
- $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $|z^n| = |z|^n$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ÖRNEK

$$Z = \frac{3 - 4i}{-1 - 2\sqrt{2}i} \text{ ise } |Z| \text{ 'yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$Z = \frac{(1 - i) \cdot (6 - 8i)}{(2 + 2i) \cdot (4 + 3i)} \text{ ise } |\bar{Z}| \text{ 'yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$Z = (3 + 4i) \cdot (1 + i\sqrt{a})$ ve $|Z| = 20$ olduğuna göre a 'yı bulunuz.

ÖRNEK

$$\left| \frac{(2 - 3i) \cdot (5 + xi)}{(3 + 2i)} \right| = 13 \quad \text{olduğuna göre } x \text{ 'i bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\left| \frac{(1-i) \cdot (a - \sqrt{6}i)}{(3+4i)} \right| = \frac{6}{5} \text{ olduğuna göre } x \text{ 'i bulunuz.}$$

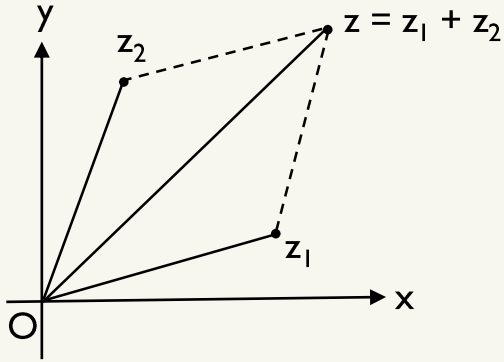
ÖRNEK

$|Z| - Z = 2 + 4i$ olduğuna göre Z 'yi bulunuz.

Karmaşık Sayılarda Dört İşlem

Karmaşık Sayılarda Toplama İşlemi

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ ise $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ dir.



$\left. \begin{array}{l} z_1 = (a,b) \\ z_2 = (c,d) \end{array} \right\} z = (a + c, b + d) \text{ ve } O z_1 z_2 \text{ paralelkenardır.}$

NOT:

$z = a + bi$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre tersi, $-z = -(a + bi) = -a - bi$ dir.

Karmaşık Sayılarda Çıkarma İşlemi

$$z_1 = (a, b) \quad \text{ve} \quad z_2 = (c, d)$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = a - c + (b - d)i$$

Karmaşık Sayılarda Çarpma İşlemi

$$z_1 = a + bi \quad \text{ve} \quad z_2 = c + di \quad \text{ise}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= ac + i(ad + bc) - bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ dir.}$$

Karmaşık Sayılarda Bölme İşlemi

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$, ($z_2 \neq 0$) olmak üzere

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \text{ olur. Bu durumda,}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \text{ bulunur.}$$

NOT:

1) $z_1 = a + bi$ olmak üzere,

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \text{ dir.}$$

2) $z_1 = a + bi$ çarpma işlemine göre tersi $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$ dir.

$z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$ nin pay ve paydasını $a + bi$ nin eşleniği olan $a - bi$ ile çarpalım.

$$z^{-1} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \text{ olur.}$$

NOT:

$$(1 + i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \text{ dir.}$$

Benzer şekilde,

$$(1 - i)^2 = -2i \text{ ve } (-1 - i)^2 = 2i \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$Z = (1 + i)^{10} + (1 - i)^6$ olduğuna göre $\text{Im}(Z)$ 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$$\left[\frac{1+i}{1-i} \right]^{10}$$

işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK

$$\left[\frac{4 + 3i}{3 - 4i} \right]^{123} \text{ işleminin sonucunu bulunuz.}$$

ÖRNEK

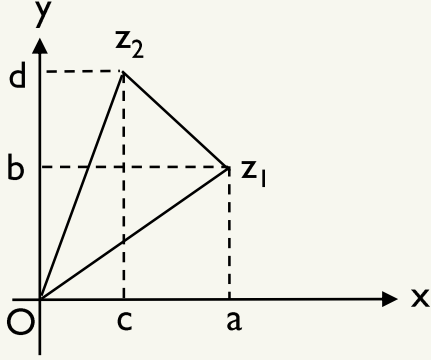
$$Z = \frac{2+i}{2-i} - \frac{2-i}{2+i} \text{ olduğuna göre } \overline{Z} \text{ 'yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \text{ işleminin sonucunu bulunuz.}$$

İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık

z_1 ve z_2 karmaşık sayılarına karşılık gelen noktaları birleştiren doğru parçasının uzunluğu, bu karmaşık sayılar arasındaki uzaklıktır.



$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık $z_1 z_2$ doğru parçasının uzunluğudur.

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_2 - z_1| = |(c + di) - (a + bi)| \\ &= |(c - a) + i(d - b)| \\ &= \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \end{aligned}$$

NOT:

$z = x + yi$, $z_0 = a + bi$ olmak üzere,

- $|z - z_0| = r$ eşitliği, merkezi (a,b) ve yarıçapı r olan bir çember belirtir.
- $|z - z_0| < r$ eşitsizliği, merkezi (a,b) ve yarıçapı r olan çemberin iç bölgesini belirtir.
- $|z - z_0| > r$ eşitsizliği, merkezi (a,b) ve yarıçapı r olan çemberin dış bölgesini belirtir.
- $r_1 < |z - z_0| < r_2$ eşitsizliği, merkezleri (a,b) ve yarıçapları r_1 ile r_2 olan çemberler arasındaki bölgeyi belirtir.

ÖRNEK

$|Z - 3 + 2i| = 2$ olduğuna göre Z karmaşık sayısının görüntüsünü bulunuz.

ÖRNEK

$|Z + 2 - i| < 1$ olduğuna göre Z karmaşık sayısının görüntüsünü bulunuz.

ÖRNEK

$|Z - 3 + 2i| \geq 2$ olduğuna göre Z karmaşık sayısının görüntüsünü bulunuz.

ÖRNEK

$2 \leq |Z| \leq 3$ şartını sağlayan Z karmaşık sayılarının belirttiği bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

$|Z + 2 + 3i| = |Z - 1 - 2i|$ denklemini sağlayan Z karmaşık sayılarının görüntüsünü bulunuz.

ÖRNEK

$|Z - 2 + 3i| = 1$ denklemini sağlayan Z karmaşık sayılarından,

a) Reel eksene en yakın olanını bulunuz.

b) Sanal eksene en yakın olanını bulunuz.

ÖRNEK

$|Z - 6 + 8i| = 12$ denklemini sağlayan Z karmaşık sayılarından,

- a) En küçük $|Z|$ 'yi bulunuz.
- b) En büyük $|Z|$ 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$|Z| \leq 3$ denklemini sağlayan Z karmaşık sayıları için,

- a) En küçük $|Z - 8 - 6i|$ 'yi bulunuz.
- b) En büyük $|Z - 8 - 6i|$ 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$|Z - 1 + 3i| = 4$ denklemini sağlayan Z karmaşık sayıları için,

- a) En küçük $|Z - 9 - 3i|$ 'yi bulunuz.
- b) En büyük $|Z - 9 - 3i|$ 'yi bulunuz.

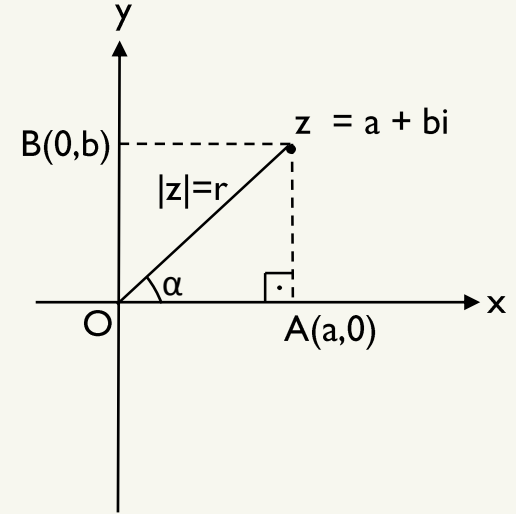
Karmaşık Sayıların Kutupsal Biçimi

$Z = a + bi$ karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsü yanda çizilmiştir.

$|OZ| = |z| = r$ ve $\widehat{m(\angle ZOA)} = \alpha$ olmak üzere ZOA dik üçgeninde,

$$\cos \alpha = \frac{|OA|}{|OZ|} = \frac{a}{|z|} \longrightarrow a = |z| \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{|ZA|}{|OZ|} = \frac{b}{|z|} \longrightarrow b = |z| \cdot \sin \alpha \text{ dır.}$$



Bu değerleri $z = a + bi$ karmaşık sayısında yerine yazarsak,

$$z = a + bi = |z| \cdot \cos\alpha + i \cdot |z| \cdot \sin\alpha = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ eşitliğini elde ederiz.}$$

Bu yazılışa $z = a + bi$ karmaşık sayısının kutupsal (trigonometrik) gösterimi denir. Bu gösterim kısaca,

$z = r\cos\alpha$ biçiminde de gösterilir.

Bir Karmaşık Sayının Kutupsal Koordinatları

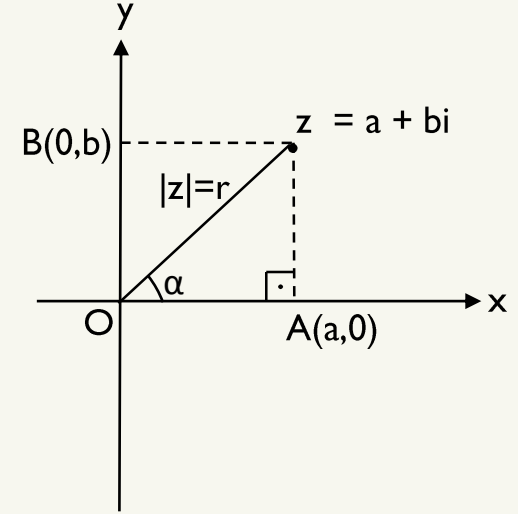
Yandaki şekilde OZ doğrusunun x eksenine yaptığı pozitif yönlü açıya z karmaşık sayısının **argümenti** denir.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{b}{|z|} \quad \text{veya} \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

eşitliklerini sağlayan α gerçel sayısı, z karmaşık sayısının argümenti olup $\arg(z) = \alpha$ biçiminde gösterilir.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; ölçüsü $\alpha + k \cdot 2\pi$ olan açılar, z karmaşık sayısının argümentleridir. Buradaki α gerçel sayısı z'nin esas argümentidir.

Bir karmaşık sayının, mutlak değeri ile esas argümentinin oluşturduğu sıralı ikiliye bu sayının **kutupsal koordinatları** denir ve $(|z|, \alpha)$ veya (r, α) biçiminde gösterilir.



ÖRNEK

Aşağıda verilen karmaşık sayıların argümentlerini bulunuz.

a) $Z = 1 + i$

b) $Z = -\sqrt{3} + i$

c) $2 - 2\sqrt{3}i$

d) 2

e) $3i$

f) -4

g) $-5i$

ÖRNEK

$$Z = \frac{1 + 7i}{4 + 3i} \quad \text{ise} \quad \text{Arg}(Z) \text{ 'yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$Z = \frac{-4 + 6i}{3 + 2i} \text{ ise } \text{Arg}(Z) \text{ 'yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$Z = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{i} \text{ ise } \text{Arg}(Z) \text{ 'yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$Z = a + 1 + 2ai$ olduğuna göre, $\text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{4}$ ise a 'yı bulunuz.

ÖRNEK

Aşağıda verilen karmaşık sayıları kutupsal biçime çeviriniz.

a) $Z = -1 - i$

b) $Z = 2\sqrt{3} - 2i$

c) $Z = -4 + 4\sqrt{3}i$

d) $Z = 4$

e) $Z = -5i$

Kutupsal Biçimde İşlemler

Toplama ve Çıkarma İşlemi

Kutupsal biçiminde verilen iki karmaşık sayı toplanır veya çıkarılırken reel kısımları kendi aralarında, sanal kısımları da kendi aralarında toplanır veya çıkarılır.

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$z_2 = r_2(\cos\beta + i \sin\beta) \text{ olmak üzere;}$$

$$z_1 + z_2 = (r_1\cos\alpha + r_2\cos\beta) + (r_1\sin\alpha + r_2\sin\beta)i$$

Çarpma ve Bölme İşlemi

$z_1 = r_1(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ ve $z_2 = r_2(\cos\beta + i \sin\beta)$ ise,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] \text{ dir.}$$

Bir Karmaşık Sayının Kuvveti

De Moivre Kuralı

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $z^n = r^n (\cos(n.\alpha) + i\sin(n.\alpha))$ dır.

NOT:

$\arg z = \alpha$ ise,

$$\arg(-z) = \pi + \alpha$$

$$\arg(\bar{z}) = 2\pi - \alpha$$

$$\arg(z^{-1}) = 2\pi - \alpha \quad \text{dır.}$$

ÖRNEK

$(-1 + \sqrt{3}i)^9$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK

$(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK

$Z_1 = 2\text{cis}30$ ve $Z_2 = 4\text{cis}60$ olduğuna göre $Z_1 - Z_2$ farkını bulunuz.

ÖRNEK

$Z_1 = 2\text{cis}15$ ve $Z_2 = 2\text{cis}75$ olduğuna göre $Z_1 + Z_2$ toplamını bulunuz.

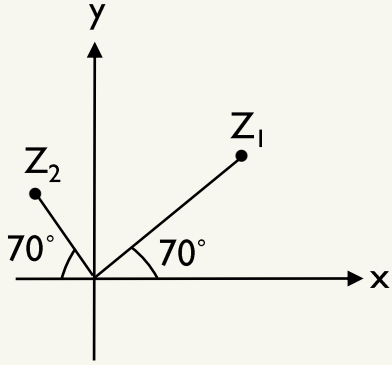
ÖRNEK

$Z_1 = 2.\text{Cis}70$ $Z_2 = 6.\text{Cis}40$ $Z_3 = 3.\text{Cis}50$ olduğuna göre $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK

$Z_1 = 3.\text{Cis}25$ $Z_2 = 2.\text{Cis}10$ ise $Z_1^2 \cdot Z_2^4$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK



$$|Z_1| = 3$$

$|Z_2| = 2$ ise $Z_1 \cdot Z_2$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK

$$Z_1 = 2 \cdot \text{Cis } 40$$

$Z_2 = 3 \cdot \text{Cis } 130$ olduğuna göre $|Z_1 - Z_2|$ işleminin sonucunu bulunuz.

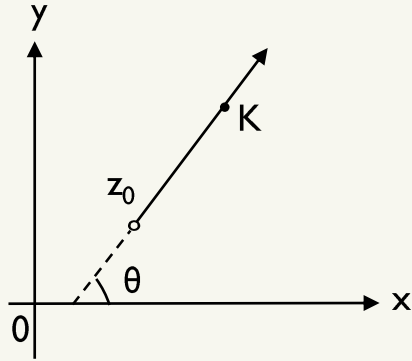
ÖRNEK

$$Z_1 = 3 \cdot \text{Cis}220$$

$Z_2 = 4 \cdot \text{Cis}340$ olduğuna göre $|Z_1 - Z_2|$ işleminin sonucunu bulunuz.

NOT:

$z_0 = a + bi$ karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsü $A(a, b)$ olmak üzere;



$\arg(z - z_0) = \theta$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsü, AK yarı doğrusudur.

ÖRNEK

$\text{Arg}(Z + 1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ ise Z karmaşık sayısının görüntüsünü bulunuz.

ÖRNEK

$\text{Arg}(Z + 1 - i) = \frac{5\pi}{4}$ ise Z karmaşık sayısının görüntüsünü bulunuz.

ÖRNEK

$$\text{Arg}(Z + 1 - i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(Z + 2i) = \frac{\pi}{4} \text{ olduğuna göre } Z \text{ 'yi bulunuz.}$$

ÖRNEK

$|Z| = 1$ ve $\text{Arg}(Z) = 20^\circ$ olduğuna göre $\text{Arg}(Z+1)$ 'i bulunuz.

ÖRNEK

$|Z - 4i| = 2$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarından,

- a) En küçük $\text{Arg}(Z)$ 'yi bulunuz.
- b) En büyük $\text{Arg}(Z)$ 'yi bulunuz.

ÖRNEK

Aşağıdaki karmaşık sayıların esas argümentlerini bulunuz.

a) $Z = \sin 40 + i \cos 40$

a) $Z = -\cos 10 - i \sin 10$

c) $Z = \sin 20 - i \cos 20$

d) $Z = 1 + \cos 40 + j \sin 40$

e) $Z = -1 + \cos 50 + j \sin 50$

Bir Karmaşık Sayının Kökleri

$z = r [\cos\theta + i\sin\theta]$ karmaşık sayısının n . dereceden kökleri

$$W_k = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) \text{ dir.}$$

$(k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1)$

Örneğin $z = r \operatorname{cis} \theta$ karmaşık sayısının karekökleri

$$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} \operatorname{cis} \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{2} \text{ olup}$$

$$k = 0 \text{ için } w_0 = \sqrt{r} \operatorname{cis} \frac{\theta}{2}$$

$$k = 1 \text{ için } w_1 = \sqrt{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right)$$

Z'nin küpkökleri

$$z^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} \operatorname{cis} \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{3} \text{ olup}$$

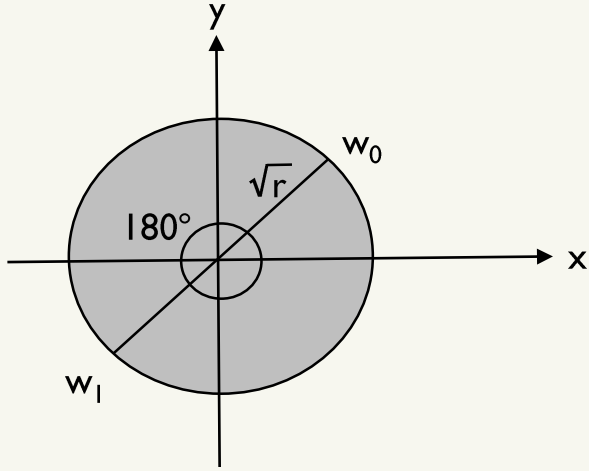
$$k = 0 \text{ için } w_0 = \sqrt[3]{r} \operatorname{cis} \frac{\theta}{3}$$

$$k = 1 \text{ için } w_1 = \sqrt[3]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)$$

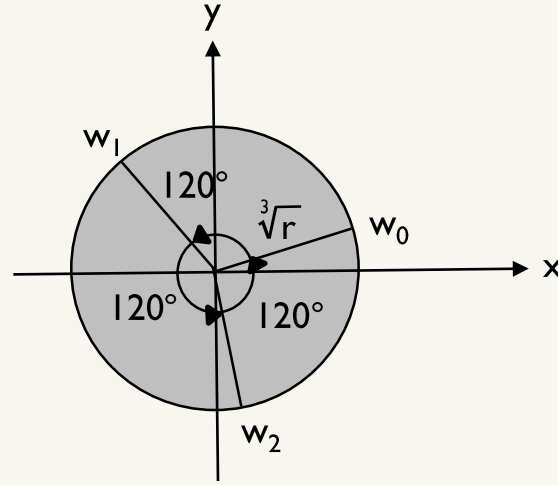
$$k = 2 \text{ için } w_2 = \sqrt[3]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \text{ tür.}$$

Sıfırdan farklı $z = r\text{cis}\theta$ karmaşık sayısının

- n . dereceden n tane kökü vardır. Bu kökler karmaşık düzlemde, merkezi başlangıç noktası, yarıçapı $\sqrt[n]{r}$ olan çember üzerinde $\frac{360^\circ}{n}$ aralıklarla sıralanırlar.



$z = rcis\theta$ nın
karekökleri
 w_0, w_1



$z = rcis\theta$ nın
küpkökleri
 w_0, w_1, w_2

ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların kareköklerini bulunuz.

a) $Z = 2 + 2\sqrt{3}i$

b) $Z = -4 + 4\sqrt{3}i$

ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların küpköklerini bulunuz.

a) $Z = 4 - 4\sqrt{3}i$

b) $Z = 8i$

ÖRNEK

$Z = -16$ ise Z 'nin 4. dereceden köklerini bulunuz.

ÖRNEK

$Z = -5 + 12i$ ise Z 'nin kareköklerini bulunuz.

ÖRNEK

$Z = 1 - 3i$ sayısının karekökleri W_0 ve W_1 ise $W_0^2 - 3 W_1 \cdot W_0 + W_1^2$ işleminin sonucunu bulunuz.

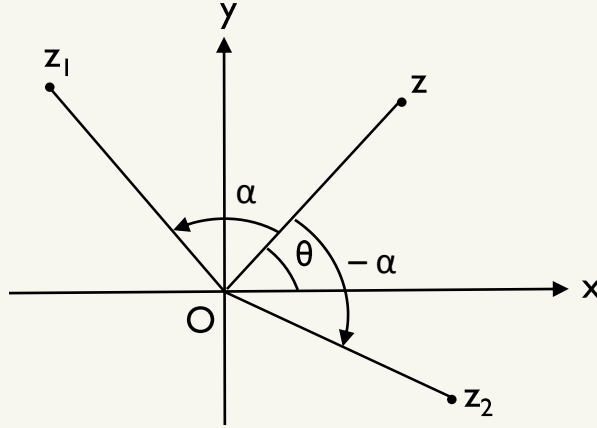
Bir Karmaşık Sayının Orijin Etrafında Döndürülmesi

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sayısının orijin etrafında pozitif yönde α kadar döndürülmesi ile elde edilen sayı z_1 ise,

$z_1 = r(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha))$ olur.

z sayısının orijin etrafında negatif yönde α kadar döndürülmesi ile elde edilen sayı z_2 ise,

$z_2 = r(\cos(\theta - \alpha) + i\sin(\theta - \alpha))$ olur.



NOT:

$z = r\text{cis } \theta$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde α kadar döndürülmesi ile elde edilen

karmaşık sayı $z_1 = r\text{cis}(\theta + \alpha)$ olduğundan, $z_1 = r\text{cis}(\theta + \alpha) = r\text{cis}\theta \cdot \text{cis}\alpha = z \cdot \text{cis}\alpha$ biçiminde ifade edilebilir.

ÖRNEK

$Z = -\sqrt{3} + i$ karmaşık sayısını pozitif yönde 240° döndürürsek hangi karmaşık sayıyı buluruz?