

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT I

KARTEZYEN ÇARPIM – BAĞINTI

I) Sıralı İkili

a ve b gibi iki değerin belli bir sıraya göre (a, b) biçiminde) tek bir nesne olarak yazılmasına sıralı ikili denir. Burada a 'ya ikilinin birinci bileşeni, b 'ye de ikinci bileşeni denir.

$(2, 3)$ sıralı ikili.

$(x, y, x + y)$ sıralı üçlü.

$(1, x, 3, y)$ sıralı dördü.

Aynı numaralı bileşenleri birbirine eşit olan ikililer eşittir. Bunun karşıtı da doğrudur. Buna göre,

$(x, y) = (a, b) \implies (x = a \text{ ve } y = b)$ dir.

ÖRNEK

$(3^n, x) = (27, n)$ olduğuna göre x 'in değeri nedir?

2) Kartezyen Çarpım

A ve B boş olmayan iki küme olmak koşuluyla birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak elde edilen bütün sıralı ikililerin kümesine A ile B'nin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ şeklinde gösterilir.

$A \times B = \{ (x, y) \in x \in A \text{ ve } y \in B \}$ 'dir.

ÖRNEK

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

olduğuna göre, $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini bulup analitik düzlemde gösterelim.

ÖRNEK

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ ve } 3 < x < 5\}$$

$$B = \{y : y \in \mathbb{R} \text{ ve } 2 \leq y < 7\}$$

olduğuna göre, $A \times B$ kümesini koordinat sisteminde gösteriniz.

ÖRNEK

$$A = \{0, 1, 2\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

kümelerinin $A \times B$ (kartezyen çarpımı) kümesinin noktalarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberinin yarıçapı kaç birimdir?

3) Kartezyen Çarpımın Özellikleri

1) Kartezyen çarpımın değişme özelliği yoktur.

$A \neq B$ ise, $AXB \neq BXA$ 'dır.

2) Kartezyen çarpımın birleşme özelliği vardır.

$$\begin{aligned}AXBXC &= AX(BXC) \\ &= (AXB)XC\end{aligned}$$

3) Kartezyen çarpımın eleman sayısı,

$$\begin{aligned}s(AXB) &= s(BXA) \\ &= s(A) \cdot s(B) \text{ 'dir.}\end{aligned}$$

4) Kartezyen çarpımın; kümelerin kesişimi, birleşimi ve farkı üzerine dağılma özelliği vardır.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

5) $A \times A = A^2$

$A \times A \times A = A^3$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

$$s(A) = 6$$

$$s(B) = 7$$

olduğuna göre, $s(AXB) + s(BXA)$ kaçtır?

ÖRNEK

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

olduğuna göre, $s\{(A \times B) \cap (A \times C)\}$ kaçtır?

ÖRNEK

$AXB = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

4) Bağıntı

A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere; $A \times B$ 'nin her alt kümesine, A'dan B'ye tanımlı bağıntı denir. Bağıntılar α , β , ... gibi sembollerle gösterilir.

β , A'dan B'ye bir bağıntı ise,

$\beta = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\}$ olur.

NOT:

- 1) AXB ile, elemanları sıralı ikililer olduğundan, AXB 'nin alt kümesi olan β 'nın elemanları sıralı ikililerdir.
- 2) Eğer β , AXA 'nın alt kümesi ise β 'ya, A 'dan A 'ya bir bağıntı veya kısaca A 'da bir bağıntıdır denir.
- 3) β , A 'dan B 'ye bir bağıntı ve $(x,y) \in \beta$ olsun. Bu durum $y\beta x$ biçiminde yazılır. “ y elemanı β bağıntısı ile x 'e bağlanmıştır.” veya “ x elemanı β bağıntısı ile y ile eşlenmiştir.” denir.
- 4) $(x, y) \in \beta$ ise $\beta(x) = y$ 'dir.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde

$\beta = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ bağıntısı tanımlanıyor. Buna göre, $s(\beta)$ kaçtır?

Sonuç

$s(A) = a$, $s(B) = b$ olsun.

1) A'dan B'ye tanımlanan bağıntı sayısı, $2^{a \cdot b}$ dır.

2) A'dan B'ye tanımlanabilen r elemanlı bağıntı sayısı,

$$\binom{a \cdot b}{r} = \frac{(a \cdot b)!}{[(a \cdot b) - r]! r!} \quad \text{dır.}$$

ÖRNEK

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

β , A'da tanımlı bir bağıntı olduğuna göre, 3 elemanlı kaç farklı β bağıntısı tanımlanabilir?

ÖRNEK

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{1, 2\} \quad \text{kümeleri veriliyor.}$$

A'dan B'ye yazılabilecek bağıntılardan kaç tanesinde $(b, 2)$ elemanı bulunur?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı 3 elemanlı bağıntıların kaç tanesinde $(2, 2)$ elemanı bulunur, $(2, 4)$ elemanı bulunmaz?

5) Bağıntının Tersisi

β , A'dan B'ye bir bağıntı olsun. β bağıntısındaki tüm ikililerin birinci bileşeni ile ikinci bileşeninin yön değiştirilmesiyle elde edilen bağıntıya β bağıntısının tersi denir ve β^{-1} ile gösterilir.

$$\beta \subset A \times B \text{ ise, } \beta^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \beta\}$$

ÖRNEK

Reel sayılar kümesinde tanımlı;

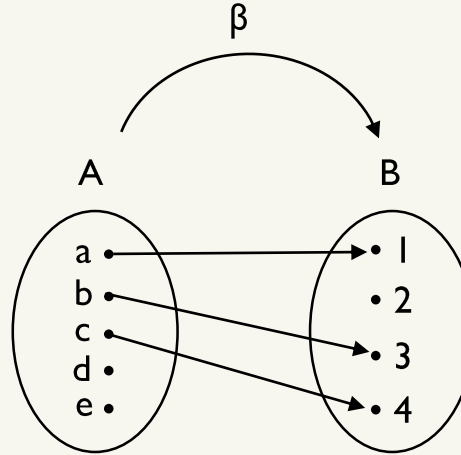
$\beta = \{(x, y) \mid x + 4y = 12\}$ olduğuna göre, β^{-1} bağıntısını yazınız.

6. Bağıntının Şema ile Gösterimi

a) Oklu Şema

A ve B kümelerinin venn şemaları çizilir. Her $x, y \in \beta$ için x elemanını y elemanına eşleştiren bir çizgi çizilir, x 'in y 'ye eşlendiğini göstermek için, çizginin y ucuna bir ok işareti konulur.

$$\begin{aligned}A &= \{a, b, c, d, e\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4\} \\ \beta &= \{(a, 1), (c, 4), (b, 3)\}\end{aligned}$$



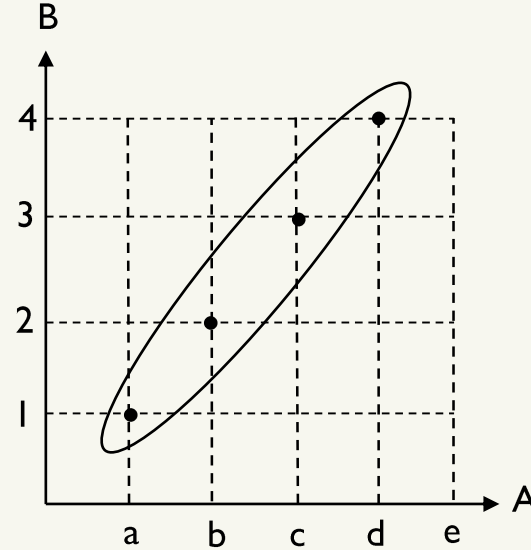
b) Koordinat Şeması

$\beta \subset A \times B$ bağıntısını koordinat şeması ile göstermek için A kümesinin elemanları x eksenı üzerine, B kümesinin elemanları y eksenı üzerine yerleştirilir. Her $x, y \in \beta$ için x ve y noktalarından indirilen dikmelerin kesim noktası (x, y) sıralı ikilileri verir.

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\beta = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$$



7) Bağıntının Özellikleri

a) Yansıma Özelliği

β , A 'da tanımlı bir bağıntı olsun. $\forall x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ ise β bağıntısının yansıma özelliği vardır. Diğer bir ifadeyle β yansıyandır denir.

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı,

$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$ bağıntısı yansıyandır.

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde tanımlanabilecek yansıyan bağıntı sayısı en çok kaçtır?

b) Simetri Özelliği

β , A 'da tanımlı bir bağıntı olsun. $\forall x, y \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ ise β bağıntısının simetri özelliği vardır. Diğer bir ifadeyle β simetriktir denir.

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı,

$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d)\}$ bağıntısı simetrik değildir.

$A = \{a, b, c\}$ kümesinde tanımlı,

$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ bağıntısı simetriktir.

c) Ters Simetri Özelliği

β , A 'da tanımlı bir bağıntı olsun. $\forall y, x \in A$ için $(y, x) \in \beta$ ise β bağıntısının ters simetri özelliği vardır. Diğer bir ifadeyle β ters simetriktir

Uyarı: (x, x) şeklindeki ikililer β 'nın ters simetri özelliğini bozmaz.

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı,

$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ bağıntısı ters simetrik değildir. Çünkü $(a, b) \in \beta$ olduğu halde $(b, a) \notin \beta$ dır.

Uyarı: Simetrik olmayan bir bağıntının ters simetrik olacağı veya ters simetrik olmayan bir bağıntının simetrik olacağı sonucu çıkarılmamalıdır.

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde tanımlı,

$\beta = \{(a, b), (a, c), (c, a), (b, a), (a, a)\}$ bağıntısında hangi özellikler vardır?

d) Geçişme Özelliği

β , A 'da tanımlı bir bağıntı olsun. $\forall [(x, y) \in \beta]$ iken $(x, z) \in \beta$ ise, β bağıntısının geçişme özelliği vardır veya β , A 'da geçişkendir denir.

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı,
 $\beta = \{(b, c), (c, a), (b, a), (c, d)\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı,
 $\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$

8) Bağıntı Çeşitleri

a) Denklik Bağıntısı

Herhangi bir A kümesinde tanımlı β bağıntısı, yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa denklik bağıntısı adını alır.

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı,
 $\beta = \{a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b)\}$

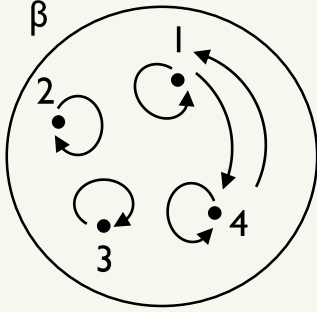
b) Sıralama Bağıntısı

Herhangi bir A kümesinde tanımlı β bağıntısı; yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip ise, bu bağıntı sıralama bağıntısıdır.

UYARI:

$\beta = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ ve } 2 \mid (x - y)\}$ matematiksel ifadesinin anlamı $x - y$ farkı 2'ye tam bölünür şeklindedir.

ÖRNEK



$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı β bağıntısının grafiği yukarıda verilmiştir. Buna göre, β bağıntısında yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden kaç tanesi vardır?