

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT I

KÜMELER

Birbirinden farklı nesneler topluluğuna küme denir.

Gösterim Şekilleri

a) Liste Biçiminde:

Açık bir biçimde kümenin elemanlarını belirtme yöntemidir.

b) Ortak Özellik Belirterek Gösterme:

Kümedeki elemanların hepsinin ortak özellikleri belirtilerek oluşturulmuş listeleme yöntemidir.

c) Venn Şeması:

Kümenin elemanlarını kapalı bir eğri içerisinde göstererek ifade etme yöntemine **Venn Şeması ile Gösterme Yöntemi** denir.

Kümelerle İlgili Tanımlar

1. Eşit Kümeler

Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir.

A ve B eşit kümeler ise $A = B$,

A ve B eşit kümeler değil ise $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

2. Denk Kümeler

Eleman sayıları eşit olan kümelere **denk kümeler** denir ve “ $\equiv$ ” işaretiyle gösterilir.

$s(A) = s(B) \longleftrightarrow A \equiv B$ 'dir.

Eşit kümeler aynı zamanda birbirine denktir. Fakat birbirine denk olan her küme, eşit olmayabilir.

3. Boş Küme

Hiç elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. $\emptyset$ veya $\{ \}$ sembolüyle gösterilir.

Boş kümenin eleman sayısı 0 (sıfır) 'dır.

4. Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan en geniş kümeye **evrensel küme** denir ve genellikle E harfiyle gösterilir.

Alt Küme

Bir A kümesinin bütün elemanları, bir B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir ve $A \subset B$ (A alt küme B) şeklinde gösterilir.

$A \subset B$ ise, B kümesi A kümesini kapsar da denir.

Bu da $B \supset A$ (B kapsar A) şeklinde gösterilir.

A kümesi, B'nin alt kümesi değilse, $A \not\subset B$ (A alt küme değildir B) şeklinde gösterilir.

Öz Alt Küme

Bir kümenin kendisinden farklı olan alt kümelerine bu kümenin öz alt kümeleri denir.

Alt Kümeye ait özellikler

- 1) Boş küme, her kümenin alt kümesidir. $\emptyset \subset A$
- 2) Her küme, kendisinin alt kümesidir. $A \subset A$
- 3) $(A \subset B \text{ ve } B \subset A) \longleftrightarrow A = B$ 'dir.
- 4) $(A \subset B \text{ ve } B \subset C) \longleftrightarrow A \subset C$ 'dir. (Geçişme özelliği)
- 5) n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı n'nin r'li kombinasyonlarının sayısı kadardır.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \quad (n \geq r)$$

$$I. \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

r elemanlı alt kümelerinin sayısı, k elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olan bir kümenin toplam (r + k) elemanı vardır.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{k} \longrightarrow (r = k \text{ veya } n = r + k) \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$II. \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

n elemanlı bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı 2^n , öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ 'dir.

III. Bir kümenin bütün alt kümelerinin oluşturduğu kümeye **kuvvet kümesi** denir.

ÖRNEK

$A = \{a, b, \{c\}, \{d, e\}, \{d, g, f\}\}$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğru değildir?

- A) $s(A) = 5$
- B) $\{a\} \subset A$
- C) $\{d, e, f\} \subset A$
- D) $a \in A$
- E) $\{a, \{c\}\} \subset A$

ÖRNEK

Eleman sayısı 2 artınca alt küme sayısı 24 artan küme kaç elemanlıdır?

İsteğe Bağlı Alt Kümeler

Kombinasyon: n tane farklı elemandan oluşan bir kümenin alt kümelerine birer kombinasyon denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq n$ olmak üzere, n elemanlı A kümesinin r elemanlı alt kümelerinden her birine A kümesinin r 'li kombinasyonu denir ve $C(n, r)$, $C\left(\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right)$ veya kısaca $\left(\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right)$ şeklinde gösterilir.

$$\left(\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 3, eleman olarak kullanılmıştır?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 4, eleman olarak bulunamaz?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2, eleman olarak vardır?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 5 olup 6 olmaz?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 3 ve 4 yoktur?

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde b veya c bulunur?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ya da 2 bulunur?

ÖRNEK

6 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 1, eleman olarak vardır?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 6, eleman olarak bulunmaz?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2, eleman olarak bulunur?

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a varken b yoktur?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin 5 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 7 veya 8, eleman olarak bulunur?

ÖRNEK

5 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı nedir?

ÖRNEK

5 elemanlı bir kümenin en az 1 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

ÖRNEK

5 ve 3 elemanlı, alt küme sayıları eşit olan kümenin 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

ÖRNEK

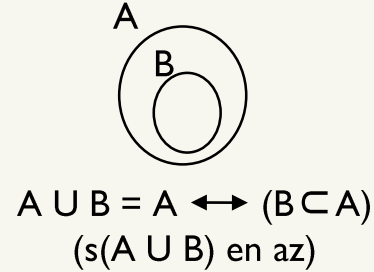
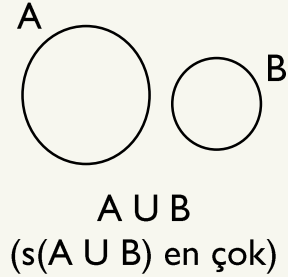
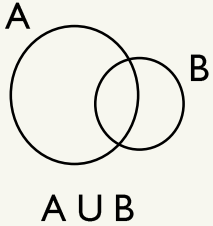
$$A = \{1, 2, 3\}$$

$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre, $A \subset X \subset B$ koşulunu sağlayan kaç farklı beş elemanlı X kümesi yazılabilmektedir?

Kümelerde İşlemler

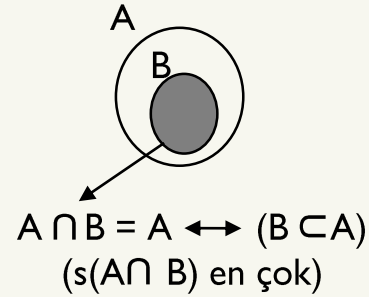
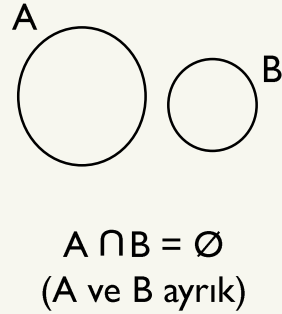
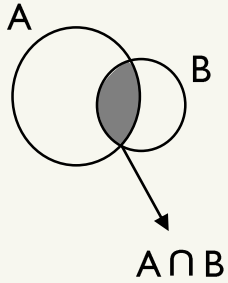
I) Birleşim (U) İşlemi

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$ 'dir.



2) Kesişim ($\cap$) İşlemi

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$ 'dir.



Hiçbir elemanı ortak olmayan iki kümeye **ayrık iki küme** denir.

3) Birleşim ve Kesişim özellikleri

$$1) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$2) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

$$3) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$4) A \cup A = A, A \cap A = A$$

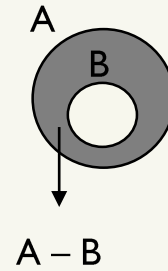
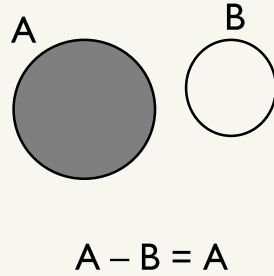
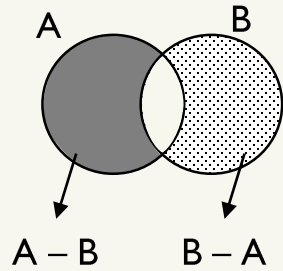
$$5) A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup E = E, A \cap E = A$$

$$6) s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$
$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

Fark (\) [Çıkarma (-)] İşlemi

A'da bulunup B'de bulunmayan elemanların oluşturduğu kümeye A fark B kümesi denir.
 $A \setminus B$ veya $A - B$ şeklinde gösterilir.

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$



$$A - A = \emptyset, A - E = \emptyset, \emptyset - A = \emptyset, A - \emptyset = A$$

$$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad (\text{Simetrik Fark})$$

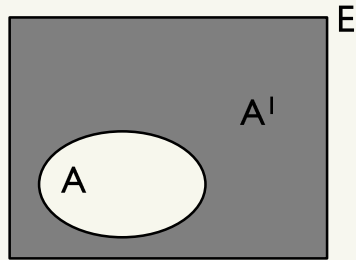
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

4) Tümleme İşlemi

E evrensel küme ve $A \subset E$ olmak üzere,

E'de (evrensel kümede) bulunup, A'da bulunmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleneni denir ve A^I veya $\bar{A}$ ile gösterilir.

$$A^I = \bar{A} = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$



Tümlemenin Özellikleri

1. $(A^I)^I = A$
2. $(\emptyset)^I = E$
3. $E^I = \emptyset$
4. $A \cap A^I = \emptyset$
5. $A \cup A^I = E$
6. $s(A) + s(A^I) = s(E)$
7. $E - A = A^I$
8. $A - B = A \cap B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$
9. De Morgan Kuralı
 $(A \cup B)^I = A^I \cap B^I$
 $(A \cap B)^I = A^I \cup B^I$
10. $(A \subset B) \longleftrightarrow (A^I \supset B^I)$

ÖRNEK

$$(M - N) \cup (M \cap N) = ?$$

ÖRNEK

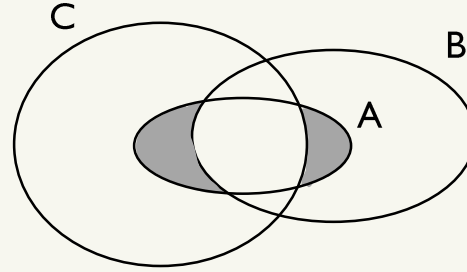
$$(M - N^I) \cup (M - N) = ?$$

ÖRNEK

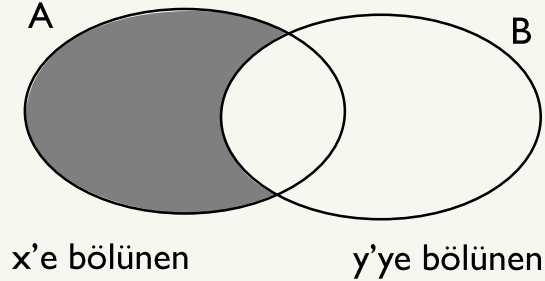
$$M' \cap (N \cap M) = ?$$

ÖRNEK

Şekilde A, B, C kümeleri verilmiştir. Taralı bölgeyi ifade ediniz.



Bölünebilme Kuralları Kümeleri



x ve y birer sayma sayısı olmak üzere, A kümesi x 'e, B kümesi de y 'ye bölünebilen sayıların kümesi olsun. Bu durumda;

$A \cap B$: Hem x 'e hem de y 'ye bölünebilenlerin,

$A - B$: x 'e bölünebilen, ama y 'ye bölünemeyenlerin,

$B - A$: y 'ye bölünebilen ama x 'e bölünemeyenlerin,

$A \cup B$: x 'e veya y 'ye bölünebilenlerin kümesi olur.

ÖRNEK

$\{x: x \leq 520, x \in \mathbb{N}^+\}$ kümesinin kaç elemanı 3 ve 5 ile tam bölünebilir?

ÖRNEK

$\{x: x < 220, x \in \mathbb{N}^+\}$ kümesinin kaç elemanı 4 veya 5 ile tam bölünebilir?

ÖRNEK

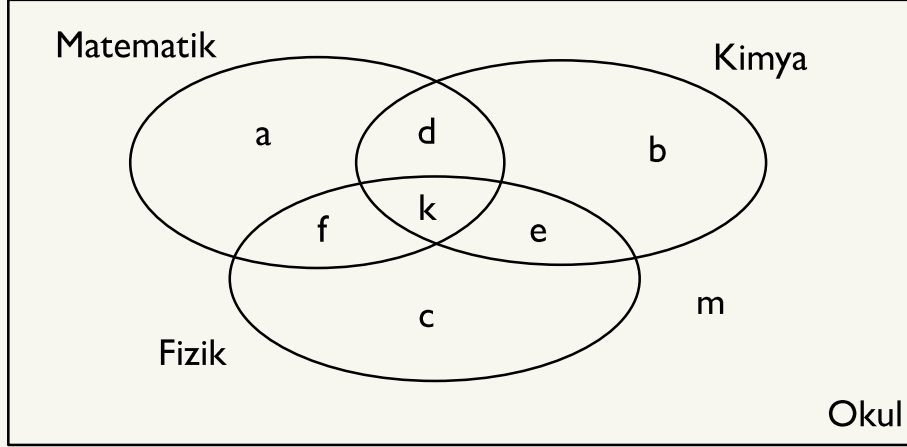
$\{x: x < 175, x \in \mathbb{N}^+\}$ kümesinin kaç elemanı 4 ile bölünür, fakat 3 ile bölünemez?

ÖRNEK

$$A = \{x: x = 4k, 15 \leq x < 202, k \in \mathbb{Z}\}$$

$B = \{x: x = 3k, 43 \leq x < 208, k \in \mathbb{Z}\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre, $s(A \cap B)$ kaçtır?

Küme Problemleri

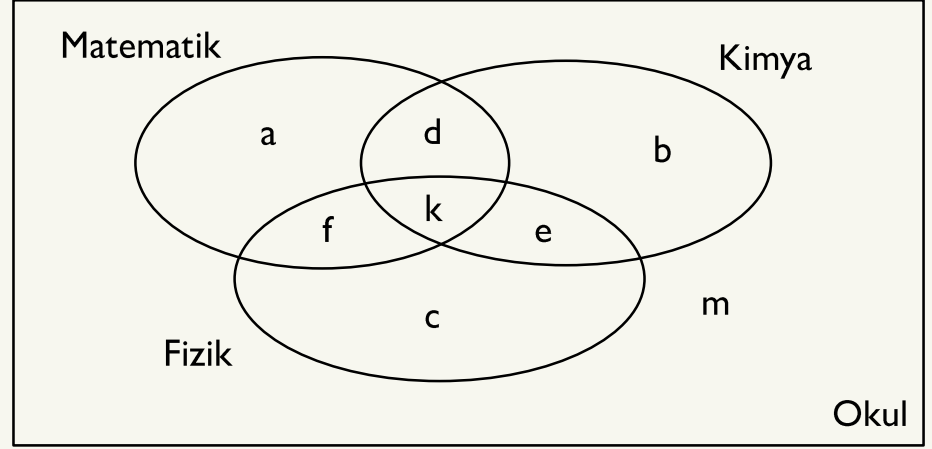


Matematik bilenlerin sayısı

Kimya bilenlerin sayısı

Fizik bilenlerin sayısı

Matematik ve kimya bilenlerin sayısı

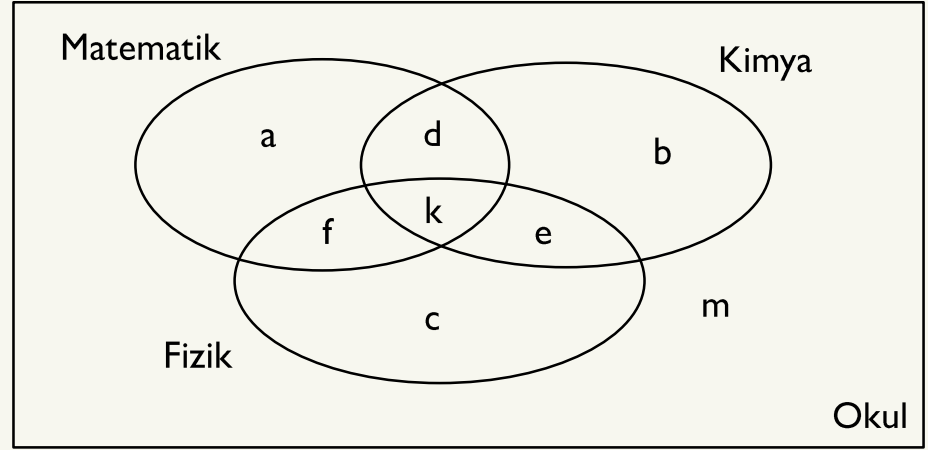


Kimya ve fizik bilenlerin sayısı

Matematik ve fizik bilenlerin sayısı

Matematik veya kimya bilenlerin sayısı

Kimya veya fizik bilenlerin sayısı

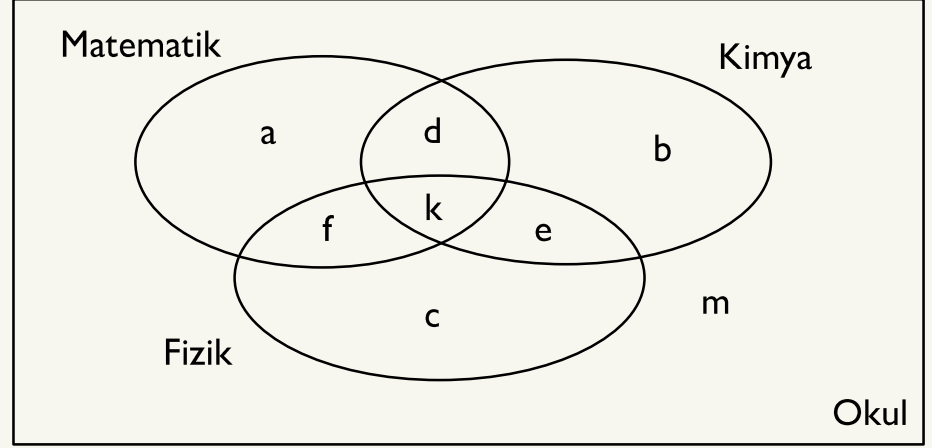


Matematik veya fizik bilenlerin sayısı

Matematik ya da kimya bilenlerin sayısı

Kimya ya da fizik bilenlerin sayısı

Matematik ya da fizik bilenlerin sayısı

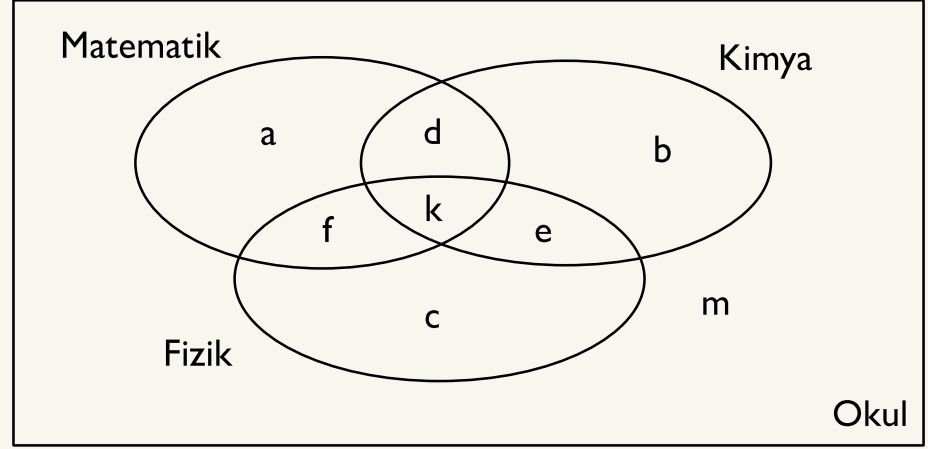


Matematik bilen ama kimya bilmeyen sayısı

Kimya bilen ama matematik bilmeyen sayısı

Kimya bilen ama fizik bilmeyen sayısı

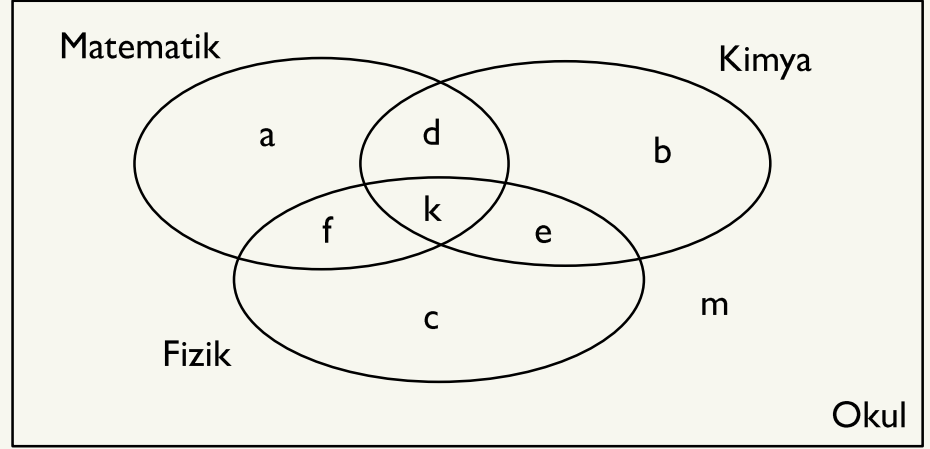
Fizik bilen ama kimya bilmeyen sayısı



Fizik bilen ama matematik bilmeyen sayısı

Matematik bilen ama fizik bilmeyen sayısı

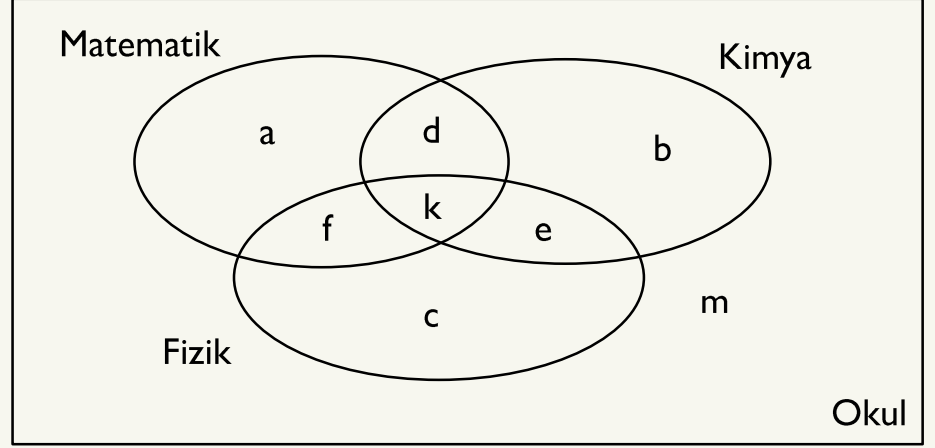
Matematik veya kimya bilen, ama fizik bilmeyen sayısı



Matematik veya fizik bilen, ama kimya bilmeyen sayısı

Kimya veya fizik bilen, ama matematik bilmeyen sayısı

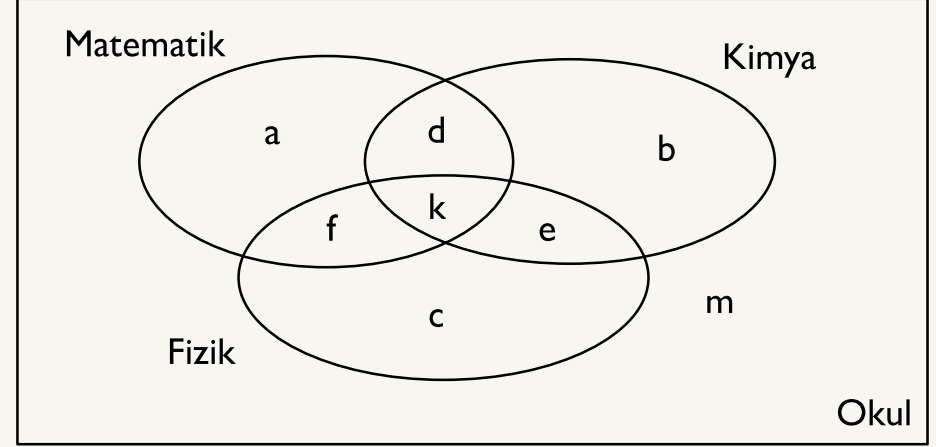
Matematik ya da kimya bilen, ama fizik bilmeyen sayısı



Matematik ya da fizik bilen, ama kimya bilmeyen sayısı

Kimya ya da fizik bilen, ama matematik bilmeyen sayısı

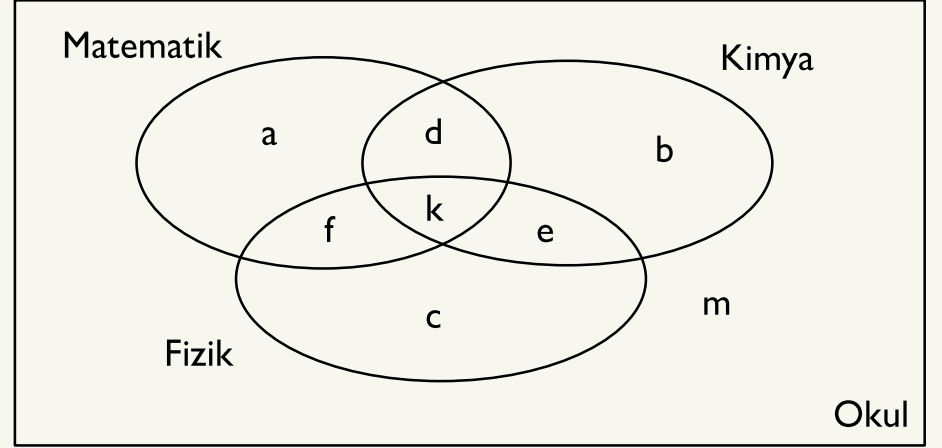
Üçünü birden bilen sayısı



Hiçbirini bilmeyen sayısı

Sadece bir dersi bilen sayısı

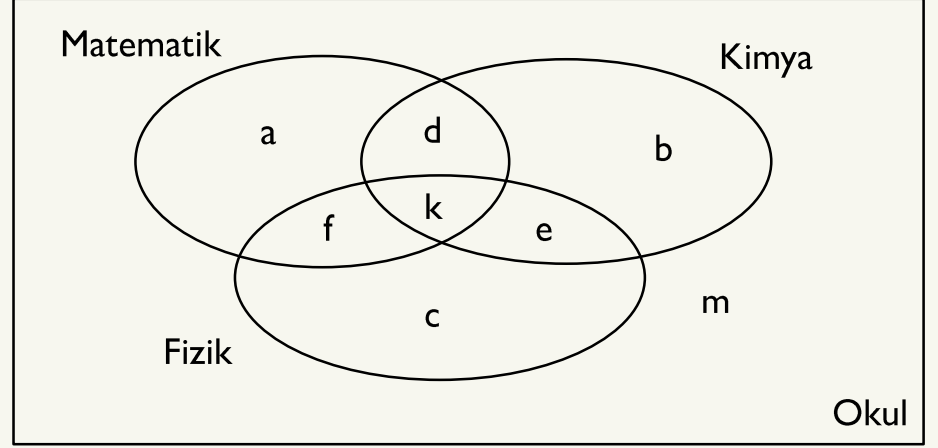
Sadece iki dersi bilen sayısı



En az bir dersi bilen sayısı

En az iki dersi bilen sayısı

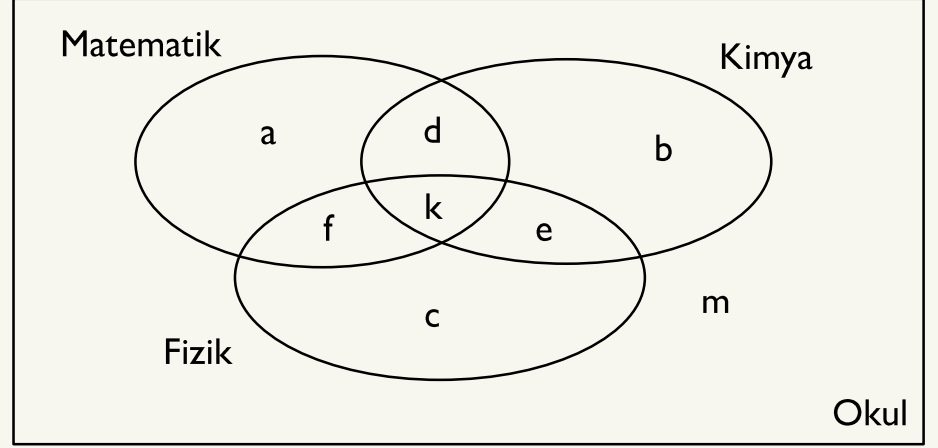
En az üç dersi bilen sayısı



En çok üç dersi bilen sayısı

En çok iki dersi bilen sayısı

En çok bir dersi bilen sayısı



ÖRNEK

40 kişilik bir grupta futbol veya basketbol oynanmaktadır. Her iki oyunu birden oynayan kişi sayısı 10'dur. Bu grupta 23 kişi futbol oynadığına göre, basketbol oynayan kaç kişidir?

ÖRNEK

İngilizce ve Almanca dillerinin konuşulduğu 40 kişilik bir toplulukta 16 kişi iki dili birden konuşmaktadır. Sadece İngilizce konuşanların sayısı, sadece Almanca konuşanların sayısına eşittir. Kaç kişi Almanca konuşmaktadır?

ÖRNEK

45 kişilik bir toplulukta futbol ve voleybol oynayanların sayısı 9 kişidir. Sadece futbol oynayanlar, sadece voleybol oynayanlar ve hiçbirini oynamayanların sayısı eşittir. Bu grupta futbol veya voleybol oynayanların sayısı kaçtır?

ÖRNEK

Türkçe veya İngilizce dillerinden en az birinin konuşulduğu bir toplulukta Türkçe bilenlerin sayısı, her iki dili bilenlerin sayısının 2 katıdır. 10 kişinin Türkçe bildiği 15 kişilik bir toplulukta Almanca bilen kaç kişidir?

ÖRNEK

Bir toplulukta tavla veya dama oynayanlar veya bu oyunları oynamayanlar vardır. En az bir oyun bilenler 14 kişi, en çok bir oyun bilenler ise 10 kişidir. Her iki oyunu birden oynayanların sayısı, oyun bilmeyenlerin 3 katı kadardır. Buna göre, bu topluluktaki toplam kişi sayısı nedir?