

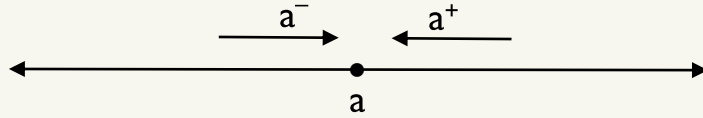
dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT 2

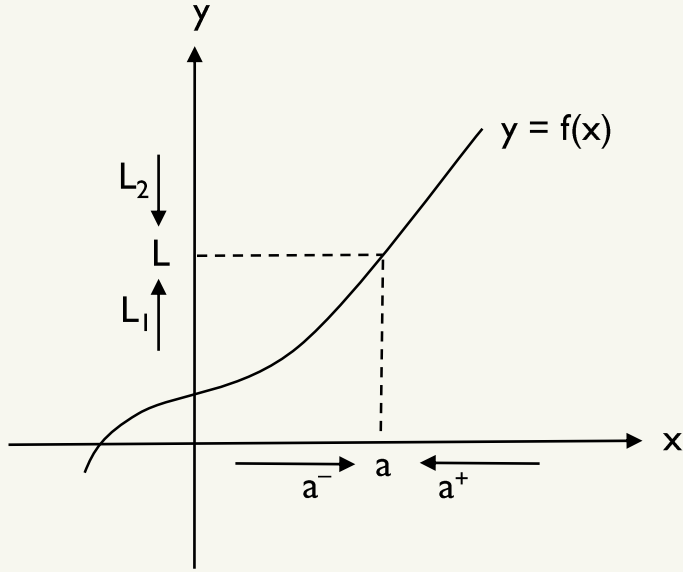
LİMİT

Bir Sayıya Sağdan ve Soldan Yaklaşmak



x değişkeni bir a sayısından büyük ve a 'ya yakın değerler alıyorsa x , a 'ya sağdan yaklaşıyor denir ve $x \longrightarrow a^+$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni bir a sayısından küçük ve a 'ya yakın değerler alıyorsa x a 'ya soldan yaklaşıyor denir ve $x \longrightarrow a^-$ şeklinde gösterilir.



- x değişkeni a sayısına soldan yaklaştığında $f(x)$ de bir L_1 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_1 sayısına f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan limiti denir ve,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \text{ şeklinde gösterilir.}$$

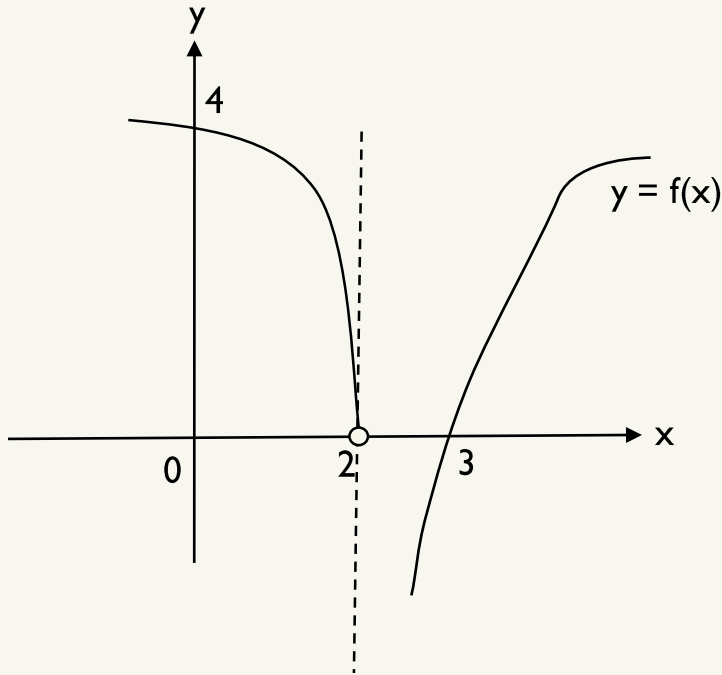
- x değişkeni a sayısına sağdan yaklaştığında $f(x)$ de bir L_2 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_2 sayısına f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan limiti denir ve,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \text{ şeklinde gösterilir.}$$

- f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter şart; bu noktadaki sağdan ve soldan limitlerin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır. Buna göre $L_1 = L_2$ ise,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ şeklinde gösterilir.}$$

ÖRNEK



Şekilde verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki limitleri inceleyiniz.

1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

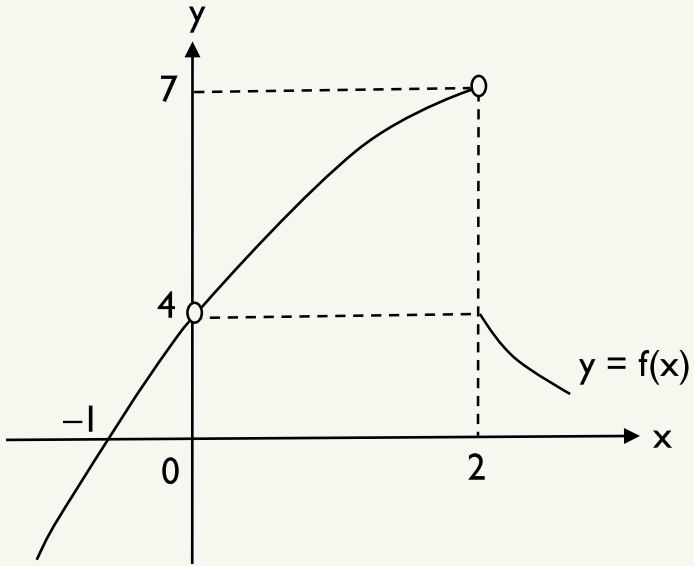
2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

5) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$

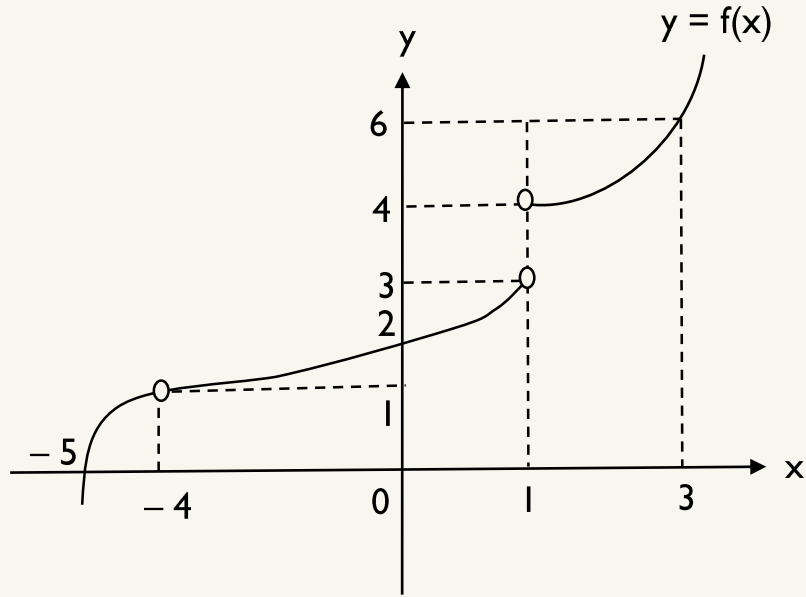
ÖRNEK



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK



Şekildeki grafik f fonksiyonuna aittir. Buna göre; -5 , -4 , 0 , 1 , 3 değerleri için var olan limitler toplamını bulunuz.

$f(x)$ fonksiyonu $x = a$ komşuluğunda tanımlı olsun.

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ise,

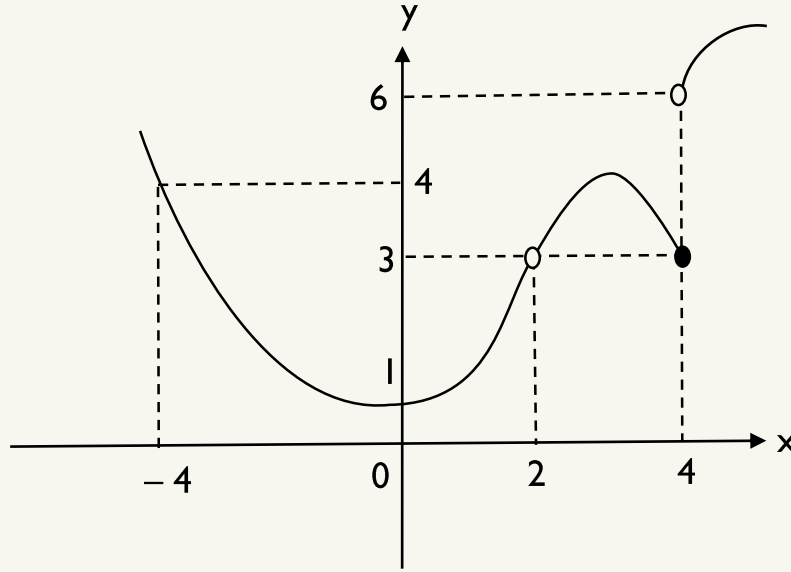
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 'dir. (Sağ ve sol limitler eşit ise limit vardır.)

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ise, fonksiyonun $x = a$ 'da limiti yoktur.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ ise limit yoktur. Ama $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ şeklinde yazılır.

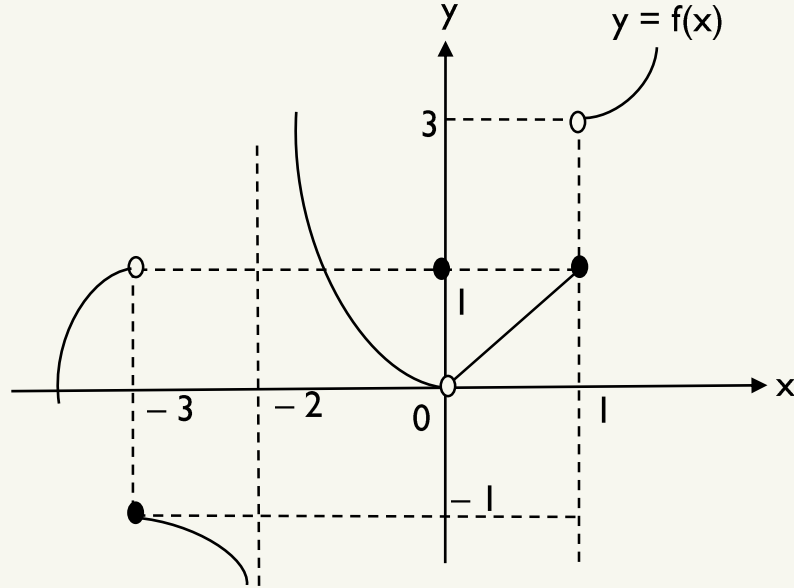
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ varsa tektir.

ÖRNEK



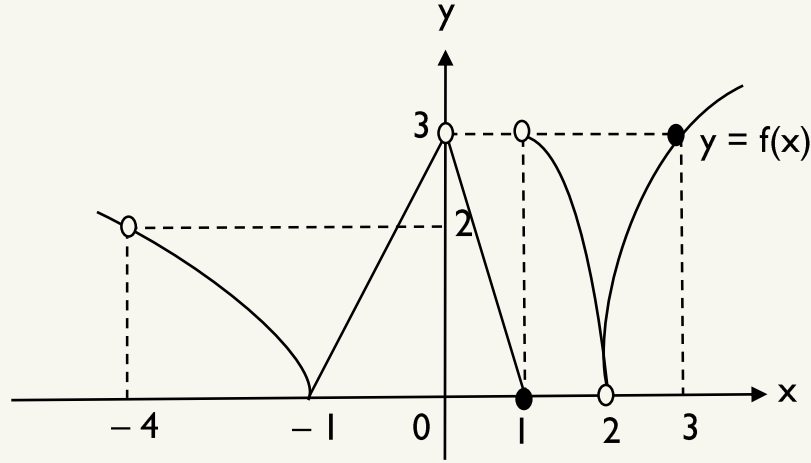
Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun $-4, 0, 2, 4$ apsisli noktalar için var olan limitler toplamını bulunuz.

ÖRNEK



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre -3 , -2 , 0 , 1 noktalarının kaç tanesinde limit vardır?

ÖRNEK



Şekilde verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$

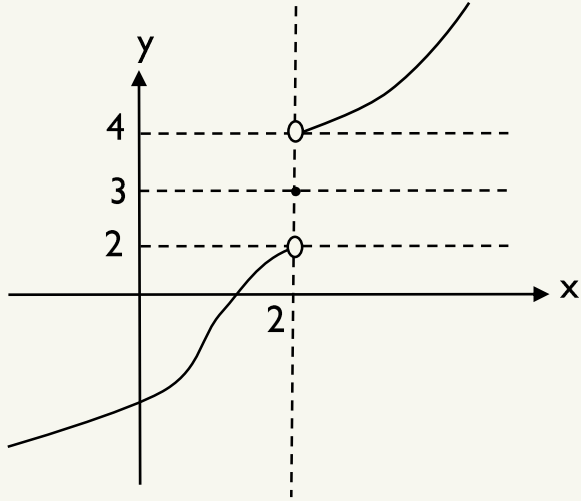
II. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

III. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

IV. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 2$

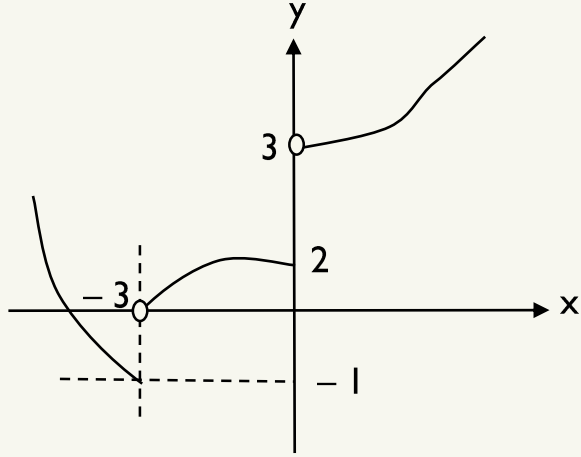
V. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

ÖRNEK



$\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{4}{x}\right)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK



$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} (f \circ f(x))$ değerini bulunuz.

Limit Özellikleri

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ olsun.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a = a$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [a \cdot f(x)] = a \cdot L_1$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ olsun.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[2n]{L_1} \quad (f(x) \geq 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0 \text{ ise})$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[2n+1]{L_1}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |L_1|$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [\log f(x)] = \log \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \quad (f(x) > 0 \text{ ise})$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c^{f(x)} = c^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \quad (c \in \mathbb{R})$

NOT:

- Gerçel (reel) sayılarda polinom olarak verilmiş bir fonksiyonun limiti hesaplanırken, kritik nokta olmadığından sağdan ve soldan limite bakmaya gerek yoktur. Fonksiyonun kritik olmayan $x = x_0$ noktalarındaki limiti, bu noktalarda x_0 değeri yerine yazılarak bulunur.
- Bir fonksiyonun kritik noktalarında limit soruluyorsa, bu noktalarda sağdan ve soldan limite bakılır.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3} \log_4(x^2 + 4)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x^2 + 3x + 1}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2x}{x^2 + 2\sqrt{x}} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$ ve $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -4$ olduğuna göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - g(x)] = -4$

II. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{4 - g(x)} = \frac{4}{5}$

III. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{8f(x)} = 2\sqrt{6}$

IV. $\lim_{x \rightarrow 3} [f^2(x) - 2g(x)] = 17$

V. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^3(x)}{g^2(x)} = \frac{3}{8}$

ÖRNEK

$f(x)$ bir çift fonksiyon olmak üzere;

$\lim_{x \rightarrow 4} [f(x) - 3] = 8$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 4} [2x - 4 - f(-x)]$ limitinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(z) = \lim_{y \rightarrow z} \left[\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{y^x - x^y}{x^3 + 2y} \right) \right] \text{ olduğuna göre } \lim_{z \rightarrow 1} f(z) \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 6} [\log_8(4x + 8) - \log_4(x - 4)]$ limitinin değerini bulunuz.

Geniştirilmiş Reel Sayılarda Limit

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki limitte $g(x)$ sıfır oluyorsa $f(x)$ ne olursa olsun limit yoktur.

$\frac{\pm a}{0}$, $\frac{0^-}{0}$, $\frac{0^+}{0}$, $\frac{\pm \infty}{0}$ durumlarında limit yoktur.

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki limitte $f(x)$ sıfır oluyorsa $g(x)$ 'in sıfır olduğu durumlar hariç limit sıfırdır.

$\frac{0}{\pm a}$, $\frac{0}{0^-}$, $\frac{0}{0^+}$, $\frac{0}{\pm \infty}$ durumlarında limit sıfırdır.

$$3) \frac{1}{0} = \text{tanımsız}$$

$$4) \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$5) \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$6) \frac{a}{0^+} = \begin{cases} +\infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}$$

$$7) \frac{a}{0^-} = \begin{cases} -\infty, a > 0 \\ +\infty, a < 0 \end{cases}$$

$$8) \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \quad (a \neq 0)$$

$$9) \frac{\pm\infty}{0^\pm} = \pm\infty$$

$$10) \frac{0^\pm}{a} = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$11) \frac{0^\pm}{\pm\infty} = 0$$

$$12) \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x}{x-3}$ limitinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^4 - 3x^2 + 2)$ limitinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{(x+1)^2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5^{\frac{1}{x}}}{3 + 7^{\frac{2}{x}}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + a + 3 \right) = 7$ olduğuna göre a 'yı bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{(x-3)^2}$ limitinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + 3}{x - 4}$ limitinin değerini bulunuz.

NOT: Kesirli fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan değerler kritik noktadır. Bu noktalarda limit soruluyor ise, sağdan ve soldan limite bakılır.

Üstel Fonksiyonun Limiti

$a \in \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun limiti için;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x - 3}{7^x + 6}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 6)$ limitinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^x - 2 \right] \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{4}{5} \right)^{-x} + \left(\frac{5}{2} \right)^x \right] \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^x$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^x$$

$$\text{III. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{5} \right)^x$$

$$\text{IV. } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{5} \right)^x$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7^x + 3^{\frac{2}{x}} - 4^{2x} - e^{2x} + \pi^{\frac{1}{x}})$ limitinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{1}{1 + 4^{\tan x}}$ değerini bulunuz.

Parçalı Fonksiyonun Limiti

Parçalı fonksiyonun alt aralıklarının sınır değerleri kritik noktalardır. Bu noktalarda limit bulunurken, sağdan ve soldan limite bakılır. Diğer noktalarda ise x değeri yerine konulup limit bulunur.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-2} & x < 0 \\ 2^{x-1} & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ise}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ değerini bulunuz.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , x < 1 \\ x^2 + 5 & , 1 \leq x < 4 \\ x + 5 & , x \geq 4 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ değerini bulunuz.

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ değerini bulunuz.

c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ değerini bulunuz.

d) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x > 0 \\ 2^x + 4 & , x = 0 \\ 2\cos x & , x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} \tan x - \cos x & , x > \pi \\ 1 & , x = \pi \\ \sin x & , x < \pi \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , x \leq 1 \\ mx^2 - 1 & , x > 1 \end{cases}$$

fonsiyonunun $x = 1$ noktasında limiti varsa m 'nin değeri nedir?

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 2 \\ x^2 + 3, & -2 \leq x < 2 \\ -x - 5, & x < -2 \end{cases} \quad \text{ise } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ değerini bulunuz.}$$

Mutlak Değer Fonksiyonunun Limiti

$y = |f(x)|$ mutlak değer fonksiyonunda $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan değerler kritik noktalardır. Bu noktalarda limit bulunurken sağdan ve soldan limite bakılır. Diğer noktalarda ise x değeri fonksiyonda yerine konulup limit hesaplanır.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 4} |x - 3|$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2|$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x - 4|}{x - 4}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} - \frac{x}{|x|}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 3 & , x = 0 \end{cases}$$

ise $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\sin x|$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\tan x|}{\tan x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|\ln x|}{\ln x}$ değerini bulunuz.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti hesaplanırken $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oluyorsa $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom ve bunların ortak çarpanı varsa, bu durumda $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları çarpanlarına ayrılarak $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifadesi sadeleştirildikten sonra limit hesaplanır.
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde pay ve paydası $f(x)$ veya $g(x)$ 'ten köklü ifade olanın eşleniğiyle çarpıldıktan sonra limit hesaplanır.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2a - ax + 2x}{x^2 - a^2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x+a)}{x^2 - 4x + 3} = 5 \text{ ise } a\text{'nın değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{x+1} - 16}{8 - 2^x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 12}{x^2 - 5x + 6}$ ifadesi bir reel sayıya eşitse a'nın değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - ax + 2}{x + 2} = 9 \text{ ise } a\text{'nın değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5 - \sqrt{x + m}}{x^3 + 1}$ ifadesi bir reel sayıya eşit ise m'nin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 4x - 4}}{x - 1} \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 1} [\log_2(4x - 4) - \log_2(x - 1)]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x}$ değerini bulunuz.

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

a reel sayı olmak üzere;

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \quad (\cos a \neq 0)$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a, \quad (\sin a \neq 0)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ise,

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\tan f(x)} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{qx} = \frac{p}{q} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{qx}{\sin px} = \frac{q}{p}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan px}{qx} = \frac{p}{q} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{qx}{\tan px} = \frac{q}{p}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{\tan qx} = \frac{p}{q} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan qx}{\sin px} = \frac{q}{p}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sin 6x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot \sin 5x}{x^2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 3x}{x^3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(3x - 3)}{2x - 2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{\cos^2 x - 1}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{3x^2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin 2x - \sin 2a}{x - a}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{2}{x}} \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+4} - 2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x - 4x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ değerini bulunuz.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$$f(x) = \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \right) \text{ olsun.}$$

$$m > n \text{ ise } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği için, } m = n \text{ ise } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

$$m < n \text{ ise } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{4x - 5}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 9}{3x^2 - x + 3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 3e^x}{4 - 2e^x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - 5}{x + 2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 8}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 7}}{x + 9}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^2 - x - 1}}{\sqrt{9x^2 + 3x - 8}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 9x - 4} - \sqrt{x^2 + 3x + 7}}{\sqrt{25x^2 - x - 2} - \sqrt{x^2 + 9x + 4}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - 1)^3 \cdot (2x + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2 \cdot (5x - 2)} \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x + x^3} + \sqrt{4x^2 + x - 6}}{\sqrt{9x^2 - x - 3} + \sqrt{16x^2 + 5x - 7}} \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^2 + \sqrt{9x^2 + 1}}}{\sqrt[4]{81x^4 - 3x^2 - 1}} \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 5^x}{7^{x+1} - 4^x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 2^x}{3^{x+1} + 2^{x-2}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2x} + 8^x - 7^x}{10^{x+1} + 7^x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 7}{(a - 1)x^3 + bx^2 + 2x + 3} = \frac{1}{5} \text{ ise } a + b \text{ 'nin de\u011ferini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 7}{ax^{b-1} + 4x - 7} = \frac{1}{5} \quad a + b \text{ 'nin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^4} + \dots + \frac{n^3}{n^4}$ değerini bulunuz.

Hiyerarşiye Göre Limit Hesabı

Pratik olarak $x \rightarrow \infty$ için kesirli fonksiyonların limiti hesaplanırken aşağıdaki sıralamaya göre, büyük terimlerin yanında ondan daha küçük terimler ihmal edilerek limit hesaplanır.

$$x^x > x! > a^x > x^a > x > \log x > \sin x$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^3}{3x^3 - x!}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - x!}{5x^4 + x^x}$ değerini bulunuz.

Aralığa Sıkıştırma Teoremi

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ olduğuna göre

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Bir a değerinin komşuluğunda $h(x)$ fonksiyonu $f(x)$ ve $g(x)$ arasında ayrıca f ve g fonksiyonlarının a noktasında limiti aynı ise f ve g fonksiyonlarının limiti h fonksiyonunun limitini verir.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - \sin 3x}{4x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{6x + 4}{x} \leq f(x) \leq \frac{-6x^3 + 3x}{-x^3 + 1}$ olduğuna göre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ limitinin eşitini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ limitinin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 5x}{4x}$ limitinin değerini bulunuz.

$\infty - \infty$ Belirsizliği

$x \rightarrow a$ veya $x \rightarrow \pm\infty$ için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de $+\infty$ ve $-\infty$ ise $f(x) - g(x)$ fonksiyonunun limitinde $\infty - \infty$ belirsizliği ortaya çıkar.

$f(x) - g(x)$ farkı bazı cebirsel işlemlerde (payda eşitlemek, pay ve paydayı eşlenikle çarpmak gibi) düzenlenerek limit $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerine dönüştürülebilir.

NOT:

Ayrıca aşağıdaki formüller kullanılarak da $\infty - \infty$ belirsizlik soruları çözülür.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x - 7} - (x - 3))$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x + 1})$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} - (ax + b)) = 3$ ise $a + b$ 'nin değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x} \right)$ değerini bulunuz.

0 . ∞ Belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0 \cdot \infty$$

$x \rightarrow a$ veya $x \rightarrow \pm\infty$ için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarından birinin limiti 0 ve diğerinin limiti ∞ ise, $f(x) \cdot g(x)$ fonksiyonunun limitinde 0 . ∞ belirsizliği ortaya çıkar.

NOT:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ veya } f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \text{ şeklinde yazılarak limit } \frac{0}{0} \text{ veya } \frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliklerinden birine dönüştürülerek bulunabilir.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} \cdot (3x-5)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \sec x$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \cdot (1 - \cos x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3}{x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \tan \frac{3}{x} \right) \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot x$ değerini bulunuz.

1^∞ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx + c} \right)^{dx + e} = e^{\frac{a \cdot d}{b}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{b}{cx}} = e^{\frac{a \cdot b}{c}}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{6}{x}} \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{3x-1} \text{ değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{4}{x}}$ değerini bulunuz.

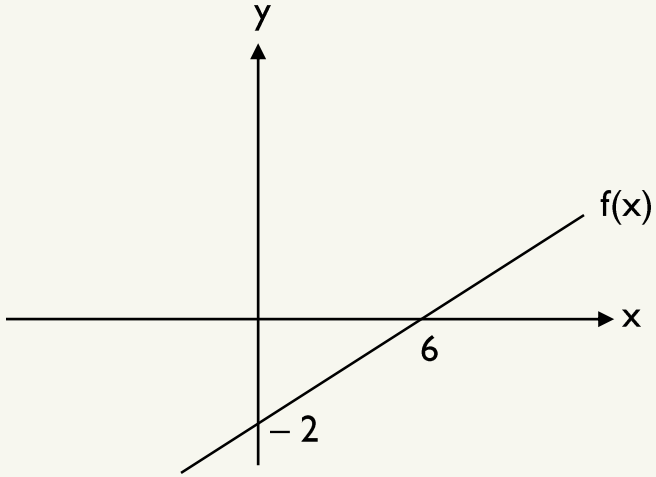
ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{x}} \right]$ değerini bulunuz.

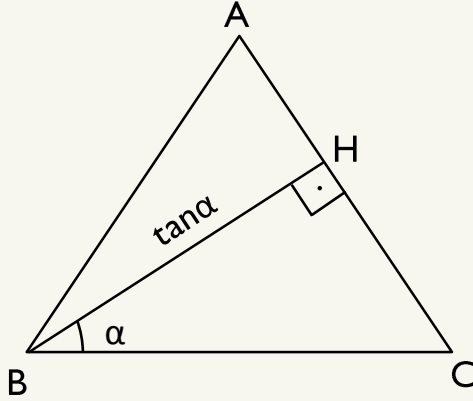
ÖRNEK



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

ÖRNEK



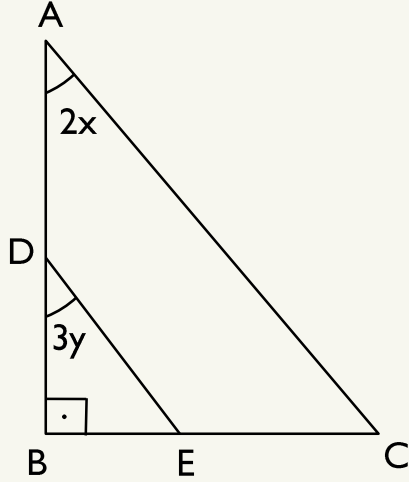
Şekildeki ABC üçgeninde

$$[BH] \perp [AC]$$

$$m(\angle HBC) = \alpha$$

$|BH| = \tan \alpha$ olduğuna göre $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}} |BC|$ limitinin değerini bulunuz.

ÖRNEK



Şekilde $|BE| = \tan y$, $|BC| = \sin x$ olduğuna göre

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0} |AC|}{\lim_{y \rightarrow 0} |DE|} \text{ oranını bulunuz.}$$

Süreklilik

$f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda $a \in (c, d)$ için $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna $x = a$ apsisli noktada süreklidir denir.

NOT:

Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir a apsisli noktada sürekli olması için,

- $f(x)$ fonksiyonu a apsisli noktada tanımlı olmalıdır.
- $f(x)$ fonksiyonunun a apsisli noktada limiti olmalıdır.
- $f(x)$ fonksiyonunun a apsisli noktasındaki limiti, a apsisli noktasındaki görüntüsüne eşit olmalıdır.

Bu şartların en az biri sağlanmıyorsa, fonksiyona bu noktada süreksizdir denir.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 2 \\ 3, & x = 2 \\ x^2 - 1, & x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 2$ 'de sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3b, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ b - x, & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda sürekli olduğuna göre, $a + b$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & x > 1 \\ 2x + 1, & x = 1 \\ ax + b, & x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu tüm gerçel sayılarda sürekli ise, $a \cdot b$ çarpımını bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{3x}, & x > 0 \\ m + 4, & x = 0 \\ 3x - n, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 0$ için sürekli olduğuna göre, $(m + n)$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 4, & x < -3 \\ x^2 + 5, & x > -3 \end{cases} \quad \text{fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?}$$

I. $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 30$

II. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$

III. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -14$

IV. f fonksiyonu $x = -3$ 'te süreksizdir.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 3, & x > 2 \\ 13, & x = 2 \\ 8x - 3, & x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu aralığı bulunuz.

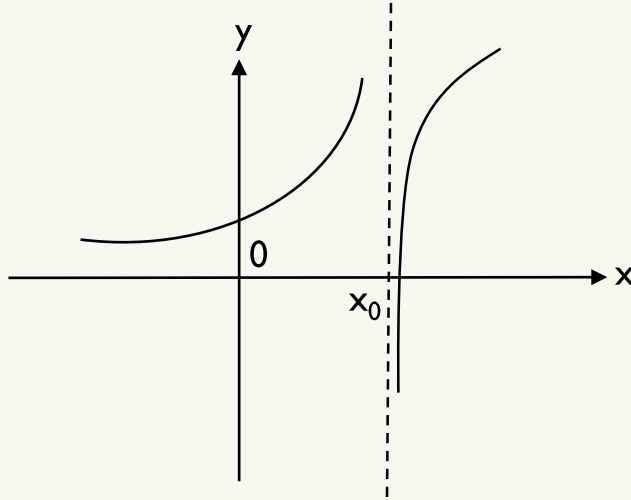
ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a}{x - 3}, & x < 3 \\ 2x^2 - 4x, & x = 3 \\ a + b, & x > 3 \end{cases}$$

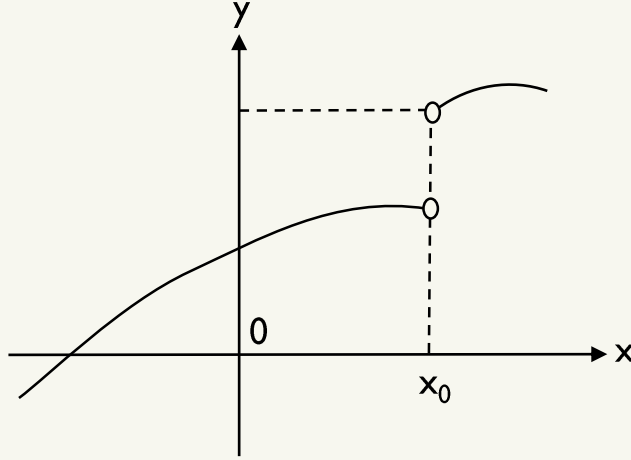
fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli olduğuna göre, $a.b$ çarpımını bulunuz.

Sürekliliğin Grafik Yorumu

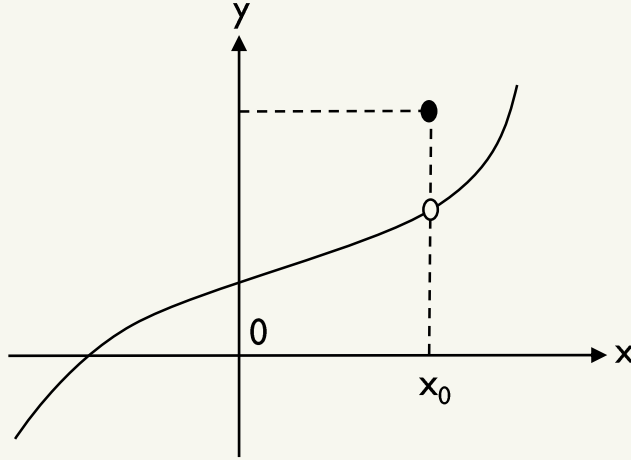
- Bir fonksiyon $x = x_0$ noktasında tanımsız ise bu noktada süreksizdir.



- Bir fonksiyonun $x = x_0$ noktasında limiti yoksa bu noktada süreksizdir.

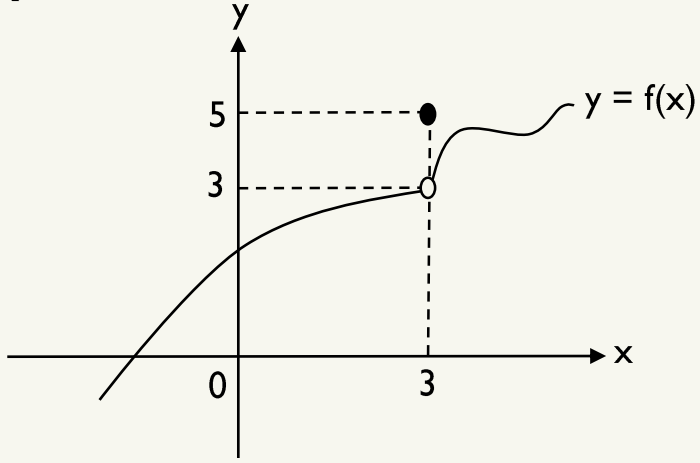


- Bir fonksiyon $x = x_0$ noktasında tanımlı ve limiti var, fakat bu noktada fonksiyonun aldığı değer limit değerine eşit değil ise, bu noktada süreksizdir.



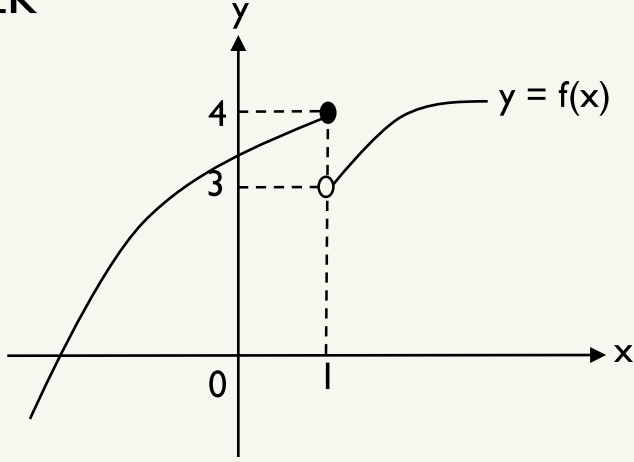
- Bir fonksiyonun grafiğinde elimizi kaldırmadan geçtiğimiz her yerde fonksiyon süreklidir, grafik çizilirken elimizi kaldırmak zorunda kaldığımız yerde fonksiyon süreksizdir.

ÖRNEK



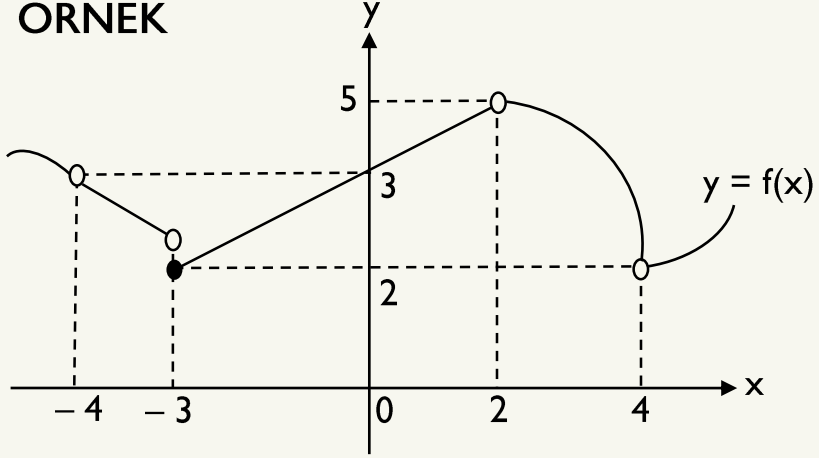
Şekilde verilen f fonksiyonunun $x = 3$ 'teki sürekliliğini inceleyiniz.

ÖRNEK



Şekilde verilen f fonksiyonunun $x = 1$ 'deki sürekliliğini inceleyiniz.

ÖRNEK



$f(x)$ fonksiyonunun $-4, -3, 0, 2$ ve 4 noktalarındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Süreklilik Özellikleri

1. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x = a$ 'da sürekli ise,

$f(x) \pm g(x)$ ile $c \cdot f(x)$ fonksiyonları $x = a$ 'da süreklidir.

$g(a) \neq 0$ ise $\frac{f(x)}{g(x)}$ de $x = a$ 'da süreklidir.

2. $f(x)$ ve $g(x)$ $x = a$ 'da sürekli ise,

$(g \circ f)(x)$ fonksiyonu $x = a$ 'da süreklidir.

3. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ şeklindeki polinom fonksiyonları bütün reel sayılar için süreklidir ve

$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ 'dır.

4. $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere,

a) $|P(x)|$, $\sqrt[2n+1]{P(x)}$, $a^{P(x)}$, $\sin P(x)$, $\cos P(x)$ şeklindeki fonksiyonlar $\forall x \in \mathbb{R}$ için süreklidir.

b) $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\sqrt[2n]{P(x)}$, $\log_a P(x)$, $\ln P(x)$, $\tan P(x)$, $\cot P(x)$ şeklindeki fonksiyonlar tanımlı oldukları x değerleri için süreklidir.

ÖRNEK

Reel sayılarda tanımlı; $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^5 - x}$ fonksiyonu kaç tam sayı değerinde süreksizdir?

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{4-x}}$ fonksiyonunun sürekli olduğu aralığı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{|x^2 - 16|} + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu tam sayı değerlerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{4\cos x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}}$ fonksiyonunun $[0, 360^\circ]$ aralığında süreksiz olduğu değerleri bulunuz.

NOT:

$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında her noktada sürekli olsun.

Eğer $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ise $x = a$ 'da sağdan süreklidir.

Eğer $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ise $x = b$ 'de soldan süreklidir.

O halde $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında süreklidir denir.