



MAT 2

LOGARİTMA

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlara ÜSTEL FONKSİYON denir.

$a > 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonu artan

$0 < a < 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonu azalandır.

$2^x = 4$ denkleminde $x = 2$ bulunur.

$3^x = 27$ denkleminde $x = 3$ bulunur.

$2^x = 5$ denkleminin çözümü kolayca bulunamaz. Bu ve benzer üslü denklemleri LOGARİTMA adı verilen bir fonksiyon yardımıyla çözebiliriz.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi alınabilir. Bu fonksiyonun tersine LOGARİTMA FONKSİYONU denir.

$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = \log_a x \text{ ile gösterilir.}$$

Logaritmanın temel özelliği;

$$y = a^x \text{ ise } x = \log_a y$$

$x = \log_a y$ fonksiyonunda a taban, y ise logaritması alınan sayıdır. x eşittir logaritma a tabanında y diye okunur.

NOT: $y = \log_a x$ fonksiyonunda $a > 0$, $x > 0$ ve $a \neq 1$ olmalıdır.

ÖRNEK: $3^x = 5$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $10^{x+1} = 3$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $\log_{\frac{1}{3}} x = -4$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $\log_2(2 \cdot \log_3(3 \cdot \log_4(x+2))) = 1$ ise x 'i bulunuz.

ÖRNEK: $\log_2 3 = x$ ise $\frac{4^{x+3}}{8^{x+1}}$ sayısını bulunuz.

TANIM ARALIĞI

$f(x) = \log_{g(x)} h(x)$ olsun,

$f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için ;

$$h(x) > 0$$

$$g(x) > 0$$

$g(x) \neq 1$ olmalıdır.

NOT: Logaritmanın tabanı ve içindeki sayı negatif olamaz ancak logaritması sonucu negatif çıkabilir.

ÖRNEK: $f(x) = \log_3(x+7) - \log_4(3-x)$ ifadesinin tanım aralığını bulunuz.

ÖRNEK: $f(x) = \log_3(3x-x^2)$ ifadesinin tanım aralığını bulunuz.

ÖRNEK: $f(x) = \log_x(x^2 - 3x - 18)$ ifadesinin tanım aralığını bulunuz.

ÖRNEK: $f(x) = \log_{(x-1)} \left[\frac{x(x-3)}{x-5} \right]$ ifadesinin tanım aralığını bulunuz.

LOGARİTMA VE ÜSTEL FONKSİYONUN TERSİ

Herhangi bir fonksiyonun tersi bulunurken x ile y yer değiştirilip y yalnız bırakılır.

Logaritma ve üstel fonksiyonda da aynı kural uygulanır.

Üstel ve logaritmik fonksiyonları birbirinin ters fonksiyonudur.

$$y = f(x) = \log_a x \text{ iken } x = \log_a y$$

$$f^{-1}(x) = a^x \text{ olur. (Logaritmanın Tanımı)}$$

$$y = f(x) = a^x \text{ iken } x = a^y$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x \text{ olur.}$$

$$\textbf{NOT: } f(x) = \log_a x \iff f^{-1}(x) = a^x \text{ ve}$$

$$x = \log_a y \iff f^{-1}(x) = a^x \text{ olur.}$$

ÖRNEK: $y = 3^{x-2}$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

ÖRNEK: $y = \log_2(x+5)$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

ÖRNEK: $y = \log_3(3x-7) - 5$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

ÖRNEK: $f(x) = 2 \cdot \log_5(x+1)$ ise $f'(4)$ sayısını bulunuz.

ÖRNEK:

$$f(x) = \log_3(x+1) \text{ ve}$$

$$g(x) = 5x + 1 \text{ ise}$$

$(f \circ g)(5)$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK:

$$f(x) = \log_2 x$$

$(g \circ f)(x) = x + 2$ olduğuna göre, $g(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2^x

B) $2^x - 1$

C) $2^x + 1$

D) $2^x + 2$

E) $2^x - 2$

ÖSS 1994

DOĞAL VE 10 TABANINDA LOGARİTMA

$y = \log_a x$ fonksiyonunda $a = 10$ alınırsa f fonksiyonuna onluk logaritma denir.

$y = \log_{10} x = \log x$ ile gösterilir.

$y = \log_a x$ fonksiyonunda $a = e$ alınırsa f fonksiyonuna doğal logaritma denir.

$y = \log_e x = \ln x$ ile gösterilir.

e sayısı, yaklaşık değeri 2,71 olan irrasyonel bir sayıdır.

Ayrıca n sonsuza yaklaştıkça $(1 + \frac{1}{n})^n$ ifadesi e sayısına yaklaşır. $(e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots)$

ÖRNEK: $\log(\ln x) = 1$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\ln [\log_2(\log_3(x + 1))] = 0$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $f(x) = \ln(3x + 1)$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

ÖRNEK: $f(x) = e^{2x+1}$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

ÖRNEK: $f(x) = \ln \left[\frac{x^2 - 6x + 5}{x + 2} \right]$ fonksiyonunu tanımlı yapan en küçük x tam sayısını bulunuz.

LOGARİTMANIN ÖZELLİKLERİ

$$1) \log_a 1 = 0$$

$$2) \log_a a = 1$$

$$3) \log_a x^m = m \cdot \log_a x$$

$$4) \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$5) \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$6) \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$7) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$8) a^{\log_a b} = b$$

$$9) \text{ Taban de\u0131i\u015ftirme } \log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$10) \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$$

$$11) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ veya } \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$12) a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

UYARI:

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a \frac{x}{y}$$

$$\log_a (x \pm y) \neq \log_a x \pm \log_a y$$

ÖRNEK: $\log_7(\log_2 2)$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_8(\log_4(\log_{\sqrt{2}}4))$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_3 \frac{1}{9} + \log_2 \frac{1}{8} + \log_5 \frac{1}{5}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_{0,6} \frac{125}{27} - \log_{0,5} 0,25$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\ln \sqrt{e \sqrt{e \sqrt{e} \dots}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{243} + \log_{5\sqrt{2}} 128 - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{32}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{4}} \dots$ işleminin sonucunun bulunuz.

ÖRNEK: $a^2 = b^3 = c$ ise $\log_a b + \log_c a + \log_b c$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log \frac{x^2 y^3 z}{t^3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_2 5 + \log_2 40 - 2 \cdot \log_2 5$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_2(x+7) - \log_2(x+5) = 2$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $\ln(xy) = 11$ ve $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = -1$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $\log_2 \frac{4}{5} + \log_2 \frac{5}{6} + \dots + \log_2 \frac{x}{x+1} = -4$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $\log(a+b) = \log a + \log b$ olduğuna göre b 'nin a türünden değeri nedir?

A) $\frac{a}{a+1}$

B) $\frac{a+1}{a}$

C) $\frac{a}{a-1}$

D) $\frac{a-1}{a}$

E) $\frac{a+1}{a-1}$

ÖYS 1987

ÖRNEK: $\log x + 2\log \frac{1}{x} = \log 8 - 2\log x$ denkleminin çözümü nedir?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

ÖYS 1988

ÖRNEK: $\log 5 = a$, $\log 3 = b$, $\log 585 = c$ ise $\log 13$ 'ün a , b ve c cinsinden değerini bulunuz.

ÖRNEK: $\log 9! = a$ ise $\log 10!$ ifadesinin a türünden değerini bulunuz.

ÖRNEK: $9^{\log_3 4} + 125^{\log_5 \sqrt[3]{5}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $5^{2-\log_5 3x} = \frac{2}{3}$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $e^{\log x} + 2x^{\log e} = 3e^3$ ise x sayısını bulunuz.

ÖRNEK: $3^{\log_2 7} - 7^{\log_2 3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_4 9 \cdot \log_3 4$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_5 49 \cdot \log_7 e \cdot \ln 125$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_{\sqrt[3]{3}} 25 \cdot \log_{\sqrt{5}} 16 \cdot \log_{256} 9$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_3 5 = a$ olduğuna göre, $\log_5 15$ 'in değeri nedir?

A) $\frac{a+1}{a}$

B) $\frac{a}{a+1}$

C) $\frac{a-1}{a}$

D) $\frac{a}{a-1}$

E) $\frac{1}{a-1}$

ÖYS 1985

ÖRNEK: $a \cdot b \cdot c = x$ ise

$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $2^{\frac{1}{\log_3 2}} + 8^{\frac{1}{\log_3 4}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÖRNEK: $\log_x 2 = a$ ve $\log_x 5 = b$ ise $\log_{25} 8$ sayısını a ve b cinsinden bulunuz.

ÖRNEK: $\log_2 2 = x$ ve $\log_3 3 = y$ ise $\log_6 8$ sayısını x ve y cinsinden bulunuz.

ÖRNEK: $\log 2 = a$ ve $\log 3 = b$ olduğuna göre, $\log_6 18$ ifadesinin a ve b türünden değerini bulunuz.

ÖRNEK: $\log_3 5 = x$ ve $\log_5 2 = y$ ise $\log_6$ sayısını x ve y cinsinden bulunuz.

ÖRNEK: $\log_2 3 = a$ olduğuna göre, $\frac{\log_5 8}{\log_5 9}$ ifadesinin a türünden eşitini bulunuz.

ÖRNEK: $\log_4 3 = a$ ise $\log_6 12$ 'nin a türünden değerini bulunuz.

ÜSLÜ VE LOGARİTMİK DENKLEMLER

ÖRNEK:

$4^x=24$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$5^{x-1}=4^{x+1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$49^x + 5 \cdot 7^x - 14 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$3.e^{2x} - 10.e^x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$e^x + 4.e^{-x} + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$\log^2 x + \log x - 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$2 - \log_2 3 = \log_4(x-1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$\log_3 x = 4 \cdot \log_x 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$x^{\ln x} = e^4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$x^{\log_2 x} = 8x^2$ denkleminin kökler çarpımını bulunuz.

LOGARİTMALİ EŞİTSİZLİKLER

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ eşitsizliğinin çözümünde;

I. $a > 1$ ise $f(x) > g(x)$

II. $0 < a < 1$ ise $f(x) < g(x)$

Ayrıca $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları tanım gereğince $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.

ÖRNEK:

$\log(x-7) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$\log_{\frac{3}{4}}(x-3) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$\log_6(x^2-x-6) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$\log_{\frac{3}{5}} [\log_3 (x+2)] \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$1 \leq \log_2(x-4) < 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{1 - \log_2(x+5)}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

ÖRNEK:

$$x = \log_{\frac{1}{2}} 20$$

$$y = \log_2 0,0002$$

$$z = \log_{12} 27$$

x, y, z'nin işaretlerini bulunuz.

ÖRNEK:

$$x = \log_{\frac{1}{2}} 3$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} 5$$

$$z = \log_{\frac{1}{2}} 7$$

x, y, z sayılarını sıralayınız.

ÖRNEK:

$$x = \log_2 67$$

$$y = \log_3 88$$

$$z = \log_5 130$$

x, y, z sayılarını sıralayınız.

ÖRNEK:

$\log 2 = 0,301$ ise 2^{50} sayısının kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

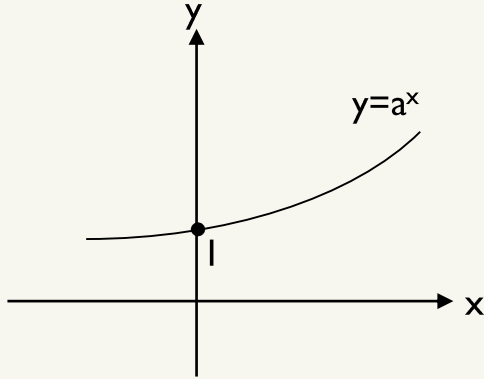
ÖRNEK:

$\log 2 = 0,301$ ve $\log 3 = 0,477$ ise 18^{10} sayısının kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

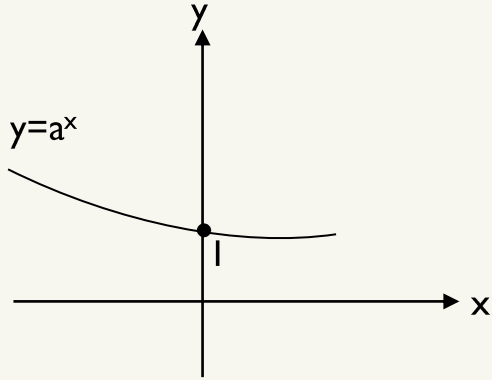
ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONUNUN GRAFİKLERİ

1) $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğini çizerken x 'e değer verilir, y değerleri bulunur. Bulunan değerler koordinat düzleminde yerlerine yazılır.

- $a > 1$ ise fonksiyon artandır.
 $y=a^x$ $x=0$ için $y=1$ olur.



- $0 < a < 1$ ise fonksiyon azalandır.
 $y=a^x$ $x=0$ için $y=1$ olur.



ÖRNEK:

$y = 3^{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÖRNEK:

$y = e^{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

II) $\log_a f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizerken;

- $f(x) > 0$ olacak şekilde tanım aralığı bulunur.
 $x=0$ verilip y bulunur.
 $y=0$ verilip x bulunur.

Bulunan değerler analitik düzlemde yerine yazılır.

- ❖ $a > 1$ ise fonksiyon artan
- ❖ $0 < a < 1$ ise fonksiyon azalandır.

ÖRNEK:

$y = \log_3 x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

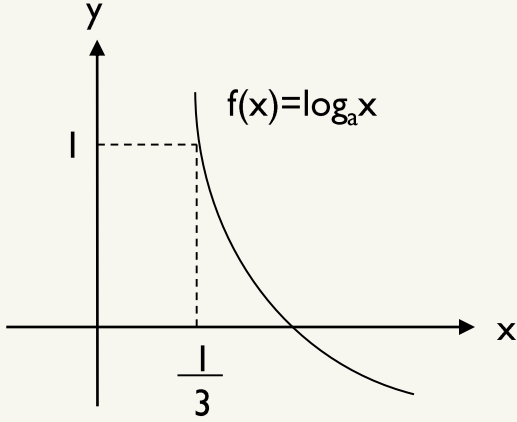
ÖRNEK:

$y = \log_2(3-x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÖRNEK:

$y = \ln(x+2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÖRNEK:



Yukarıda $\log_a x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, $f\left(f\left(\frac{1}{27}\right)\right)$ değeri kaçtır?

A) - 3

B) - 1

C) 1

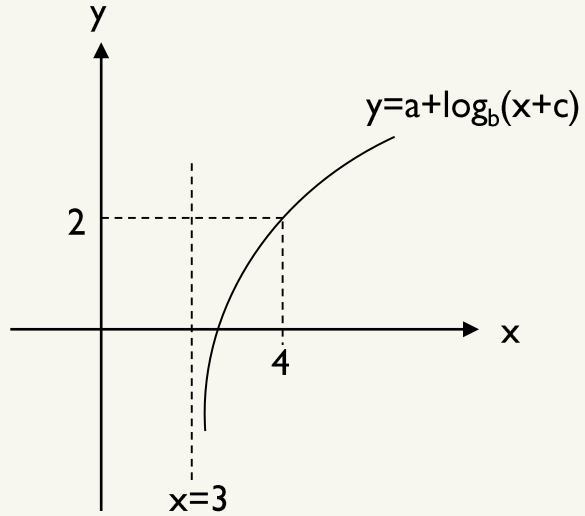
D) 2

E) 3

ÖSS 2009

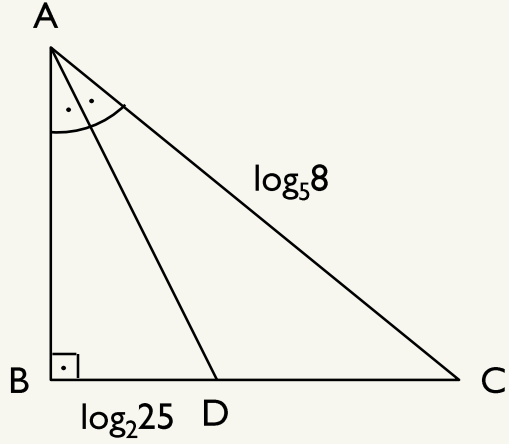
ÖRNEK:

Şekildeki grafiğe göre a sayısını bulunuz.



ÖRNEK:

Şekilde verilenlere göre $A(ADC)$ kaç br^2 dir?



ÖRNEK:

Şekilde verilenlere göre x kaçtır?

