

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT I

MANTIK

Önerme

Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren ve aynı zamanda hem doğru hem de yanlış olmayan ifadelere **önerme** denir.

Matematikte önermeler p , q , r , $s \dots$ gibi harflerle gösterilir.

ÖRNEK

Aşağıdakilerden hangisi önerme değildir?

- A) Bir gün 36 saattir.
- B) Üçgenin dış açıları toplamı 270° 'dir.
- C) π sayısı 3'ten büyüktür.
- D) Türkiye'nin başkenti Ankara'dır.
- E) Hava çok güzel.

- Bir p önermesinin doğru olması D veya 1 ile gösterilir.
- Bir p önermesinin yanlış olması Y veya 0 ile gösterilir.
- $p : 5^{-2} < 0$ ise $p \equiv$
- $q : \text{'Asal sayıların en küçüğü 3'tür.'}$ ise $q \equiv$
- $r : \text{'24'ün pozitif bölen sayısı 10'dur.'}$ ise $r \equiv$

Bir önermenin doğru ya da yanlış olarak ifade edilmesine doğruluk değerleri, doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya da doğruluk tablosu denir.

n farklı önermenin 2^n tane farklı sonucu vardır.

p	q

p	q	r

Denk Önergeler

Doğruluk değeri aynı olan iki önermeye denk önermeler denir.

p önermesi q önermesine denk ise $p \equiv q$,

p önermesi q önermesine denk değil ise $p \not\equiv q$.

Bir Önermenin Değili (Olumsuzu)

Bir önermenin hükmünün değiştirilmesi ile elde edilen yeni önermeye ilk önermenin değili (olumsuzu) denir.

p 'nin değili p^l ile gösterilir.

ÖRNEK

Üç basamaklı en büyük sayı 99'dur.

p :

p^I :

p 'nin doğruluk değeri: $p \equiv$

p^I nin doğruluk değeri: $p^I \equiv$

Bileşik Önergeler

İki veya daha fazla önermenin 've, veya, ise, ancak ve ancak' gibi işlemlerle birbirlerine bağlanmasından oluşan yeni önermelere bileşik önermeler denir.

Veya İşlemi (v)

p veya q bileşik önermesi ($p \vee q$) şeklinde gösterilir. p ile q önermesinden oluşan ($p \vee q$) bileşik önermesi, bileşenlerinden en az biri doğru iken doğru, bileşenlerinden her ikisi de yanlış iken yanlıştır.

Veya İşleminin Özellikleri

Tek kuvvet özelliği: $p \vee p \equiv p$

Değişme özelliği: $p \vee q \equiv q \vee p$

Birleşme özelliği: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ÖRNEK

Aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $0^I \vee I \equiv$

b) $0 \vee (I^I \vee 0) \equiv$

c) $(I \vee I^I) \vee (0^I \vee I) \equiv$

d) $(0 \vee I) \vee (I \vee I) \equiv$

Ve İşlemi

p ve q bileşik önermesi ($p \wedge q$) şeklinde gösterilir.

p ile q önermesinden oluşan ($p \wedge q$) bileşik önermesi, bileşenlerinden her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

ÖRNEK

Aşağıdaki doğruluk tablosunu doldurunuz.

p	q	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Ve İşleminin Özellikleri

Tek kuvvet özelliği: $p \wedge p \equiv p$

Değişme özelliği: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Birleşme özelliği: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

ÖRNEK

Aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $0^1 \wedge 1 \equiv$

b) $0 \wedge (1^1 \wedge 0) \equiv$

c) $(0^1 \wedge 1^1) \wedge (1 \wedge 1) \equiv$

d) $(0 \wedge 1)^1 \wedge (0^1 \wedge 1) \equiv$

$\wedge$ 'nin $\vee$ üzerine soldan dağılma özelliği,

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$\vee$ 'nin $\wedge$ üzerine sağdan dağılma özelliği,

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$\vee$ 'nin $\wedge$ üzerine sağdan dağılma özelliği,

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$\vee$ 'nin $\wedge$ üzerine soldan dağılma özelliği,

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

De Morgan Kuralı

p veya q 'nun değili: $(p \vee q)^I \equiv p^I \wedge q^I$

p ve q 'nun değili: $(p \wedge q)^I \equiv p^I \vee q^I$

ÖRNEK

$p \vee (I \wedge p)$ bileşik önermesinin değilinin denk olduğu ifadeyi bulunuz.

ÖRNEK

$(p \vee q) \wedge (p \vee q')$ bileşik önermesinin değilinin denk olduğu ifadeyi bulunuz.

Totoloji ve Çelişki

Bir bileşik önerme, bileşenlerinin tüm doğruluk değerlerine karşılık 1 (doğru) değerini alıyorsa bu bileşik önermeye totoloji, tüm doğruluk değerlerine karşılık 0 (yanlış) değerini alıyorsa bu bileşik önermeye çelişki denir.

ÖRNEK

$(p \vee q) \vee (p^I \wedge q^I)$ önermesinin denk olduğu ifadeyi bulunuz.

ÖRNEK

$p \wedge (p \vee q)$ önermesinin denk olduğu ifadeyi bulunuz.

ÖRNEK

$[p \wedge (q \vee p^I)] \wedge (p \wedge q)^I$ bileşik önermesinin denk olduğu ifadeyi bulunuz.

İse İşlemi ($\Rightarrow$)

p ile q önermelerinin ise işlemi ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önerme $p \Rightarrow q$ şeklinde yazılır ve ‘p ise q’ diye okunur. $p \Rightarrow q$ önermesi p doğru q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğru olarak tanımlanır.

ÖRNEK

$$(4 < 5) \Rightarrow (2 < -2)$$

$$(2 + 4 > 10) \Rightarrow (1 = 1)$$

$$(2 + 9 > 13) \Rightarrow (3 = 3)$$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ÖRNEK

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre, $(p^1 \vee q)$ bileşik önermesinin doğruluk değeri nedir?

Koşullu Önerme

İse işlemi ile oluşan $p \Rightarrow q$ bileşik önermesine koşullu önerme denir. $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde p önermesi q için yeterli koşul, q önermesi de p önermesi için gerekli koşuldur.

Önermenin Karşıtı, Tersi ve Karşıt Tersi

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$

$p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$

ÖRNEK

p , q ve r önermelerinin değerleri sırasıyla p^1 , q^1 , r^1 ile gösterildiğine göre, aşağıdakilerden hangisi $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge r)$ önermesine denktir?

- A) $p^1 \wedge q^1 \Leftrightarrow q^1 \vee r^1$
- B) $p^1 \wedge q^1 \Leftrightarrow q^1 \wedge r^1$
- C) $p^1 \vee q^1 \Leftrightarrow q^1 \wedge r^1$
- D) $p^1 \wedge r^1 \Leftrightarrow p^1 \vee q^1$
- E) $q^1 \vee r^1 \Leftrightarrow p^1 \wedge q^1$

(2010 / YGS)

Ancak ve Ancak İşlemi ($\Leftrightarrow$)

p ve q iki önerme olmak üzere, $p \Leftrightarrow q$ ile $q \Leftrightarrow p$ koşullu önermelerinin $\wedge$ işlemi ile birbirine bağlanmasından oluşan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine iki yönlü koşullu önerme denir. İki yönlü koşullu önerme $p \Leftrightarrow q$ şeklinde yazılır ve “ p ancak ve ancak q ” diye okunur. $p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesi, p ile q ’nun doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ÖRNEK

$p \equiv 1, q \equiv 0$ olduğuna göre, $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

UYARI

1) $p \Leftrightarrow q \equiv 1$ ise $p \equiv q \equiv 1$ veya $p \equiv q \equiv 0$

2) $p \Leftrightarrow q \equiv 0$ ise $(p \equiv 1, q \equiv 0)$ veya $(p \equiv 0, q \equiv 1)$

ÖRNEK

$p \wedge q \equiv 0$ olduğuna göre, $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p^I \vee q^I)^I$ bileşik önermesinin doğruluk değeri kaçtır?

Açık Önerme

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlerle doğru ya da yanlış olduğu belirlenebilen ifadelere açık önerme denir.

$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı, $p(x) : 2x - 2 \leq 4$ açık önermesinin çözüm kümesini bulalım.

Niceleyiciler

Her ve bazı sözcüklerine niceleyiciler denir. Her niceleyicisi, önüne geldiği elemanların tamamını anlattığı için bu niceleyiciye evrensel niceleyici denir ve $\forall$ sembolü ile gösterilir. Bazı niceleyicisi en az bir tane anlamında kullanıldığı için bu niceleyicilere varlıksal niceleyici adı verilir, $\exists$ sembolü ile gösterilir.

ÖRNEK

p: $3x - y = 17$ önermesinin olumsuzunu bulunuz.

ÖRNEK

p: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 \leq 5$ önermesinin olumsuzunu bulunuz.

ÖRNEK

$p(x) : “(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 16) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z}, x - 7 = 0)”$ açık önermesinin değilini bulunuz.

ÖRNEK

$p(x) : “(\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{N}, 2x + 1 > 0)”$ açık önermesinin değilini bulunuz.