

dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu ol!

MAT I

MODÜLER ARİTMETİK

a, b, m birer tam sayı ve $m \geq 1$ olmak üzere, $a - b$ farkı m 'nin tam katı ise a ile b sayıları m modülüne göre birbirine denktir. $a \equiv b \pmod{m}$ biçiminde yazılır ve m modülüne göre, a sayısı b 'ye denktir denir.

$$\begin{array}{r|l} a & m \\ \hline - & \\ \hline b & k \end{array}$$

$$a = m \cdot k + b \quad (k \text{ bir tam sayı})$$

ÖRNEK

$143 \equiv x \pmod{5}$ olduğuna göre, x 'in alabileceği değerleri bulunuz.

ÖRNEK

– $24 \equiv x \pmod{7}$ denkleğini sağlayan x tam sayılarının alabileceği değerler kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$184 \equiv 4 \pmod{m}$ olduğuna göre, m 'nin alabileceği kaç farklı değer vardır ?

ÖRNEK

$74 \equiv 2 \pmod{x}$ denkleğini sağlayan x sayılarının toplamı kaçtır?

ÖRNEK

$4x + 1 \equiv 4 \pmod{11}$ olduğuna göre, x 'in en küçük doğal sayı değeri kaçtır ?

ÖRNEK

$x^2 + 3x - 10 \equiv 0 \pmod{x + a}$ olduğuna göre, a değerleri toplamı kaçtır ?

UYARI

m ile bölündüğünde x kalanını veren tam sayılar kümesi $\bar{x}$ ile gösterilir ve x 'in denklik sınıfları şeklinde tanımlanır.

(Mod 3)'te kalan sınıflarının kümesi,

$$\mathbb{Z}/3 = \{0, 1, 2\} \text{ ve}$$

$$\bar{0} = \{\dots - 9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{\dots - 8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{\dots - 7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

I) Aynı modüldeki iki denklik, taraf tarafa toplanabilir, çıkarılabilir, çarpılabilir fakat bölünemez.

$$x \equiv y \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m}$$

a) $x + a \equiv y + b \pmod{m}$

b) $x - a \equiv y - b \pmod{m}$

c) $x \cdot a \equiv y \cdot b \pmod{m}$

- 2) Bir denklemin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir, her iki tarafından aynı sayı çıkarılabilir, her iki tarafı aynı sayı ile çarpılabilir ve her iki tarafının aynı kuvveti alınabilir.

$$x \equiv y \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m}$$

$$a) x + c \equiv y + c \pmod{m}$$

$$b) x \cdot c \equiv y \cdot c \pmod{m}$$

$$c) x^n \equiv y^n \pmod{m}, (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$(x, y, a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ ve } m \in \mathbb{Z}^+ - \{1\})$$

d) Bir denkliğin iki tarafı aynı sayı ($c \in \mathbb{Z}$) ile sadeleşirken;

1) a ile m ve b ile m aralarında asal ise,

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{m}$$

2) OBEB(a, b, m) = k ise,

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{m}{k}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK

7^{15} in 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÖRNEK

7^{509} in 16 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÖRNEK

1237^{196} sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır ?

ÖRNEK

Her beş günde bir nöbet tutan er, ilk nöbetini salı günü tutmuş ise, 18. nöbetini hangi gün tutar ?

ÖRNEK

Bugün günlerden salıdır. 1570 gün önce doğan bir çocuk hangi gün doğmuştur ?

ÖRNEK

2^{3k+5} sayısının $(k \in \mathbb{N}^+)$ 7 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÖRNEK

$\mathbb{Z}/8$ 'de karekökleri bulunan sayılar kümesini yazınız.

KURAL

x , m 'nin tam katı olmayan pozitif bir tam sayı ve m bir asal sayı ise,

$$x^{m-1} \equiv 1 \pmod{m} \text{'dir.}$$

x 'in $(m - 1)$ 'den daha küçük kuvvetinde de 1 bulunabilir.

UYARI

Kesirlerin modüldeki değerlerini bulmak için kesrin payına, modül veya modülün katları paydaya tam bölünecek şekilde eklenir.

$\mathbb{Z}/7$ 'de $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-98}$ sayısı kaçta eşittir ?