



MAT 2

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİĞİ (PARABOL)

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

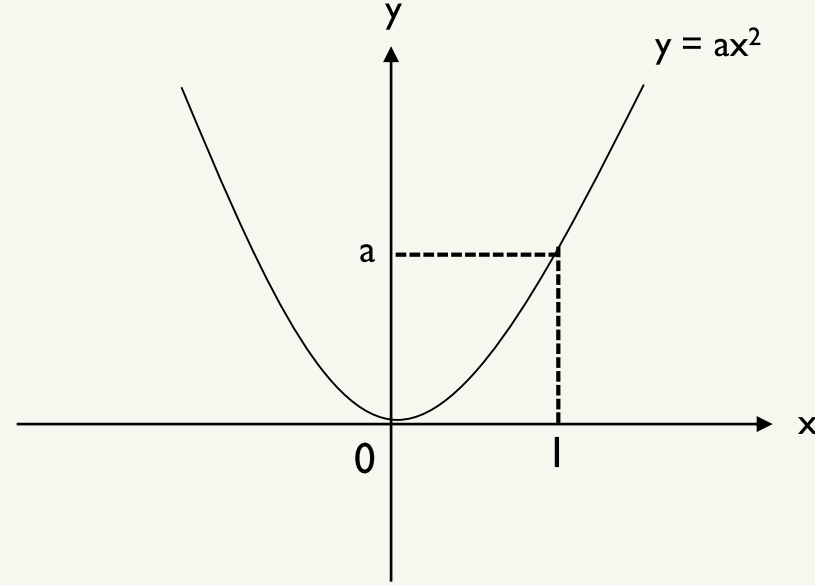
şeklinde tanımlı fonksiyona **2. dereceden fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların grafiğine **parabol** adı verilir.

Parabolün Çizimi

1) $y = ax^2$ Parabolünün Çizimi

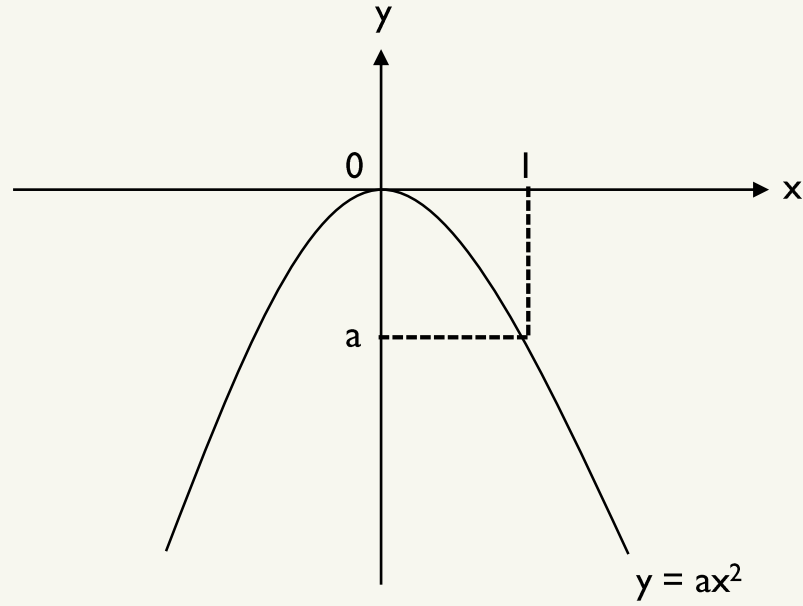
$a > 0$ ise;

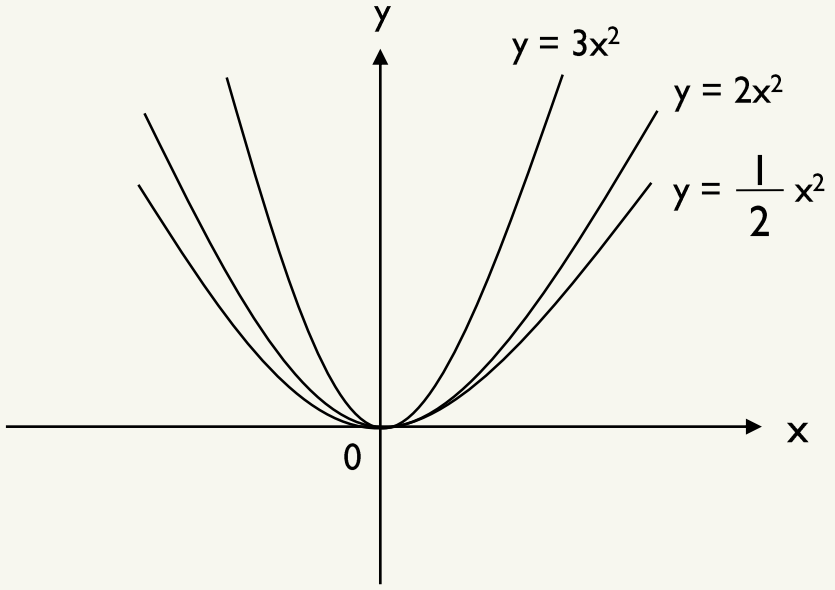
- Kollar yukarı doğru olur.
- $(0, 0)$ noktası tepe noktasıdır.
- y eksenini simetri eksenidir.
- Görüntü kümesi $[0, \infty)$ aralığıdır.



$a < 0$ ise;

- Kollar aşağı doğru olur.
- $y = ax^2$ parabolünün görüntü kümesi $(-\infty, 0]$ aralığıdır.

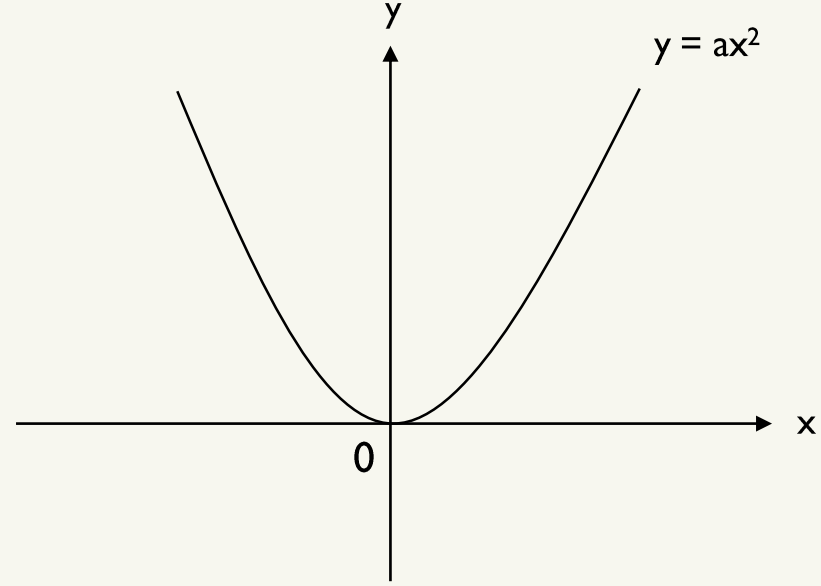




2) $y = ax^2 + c$ Parabolünün Çizimi

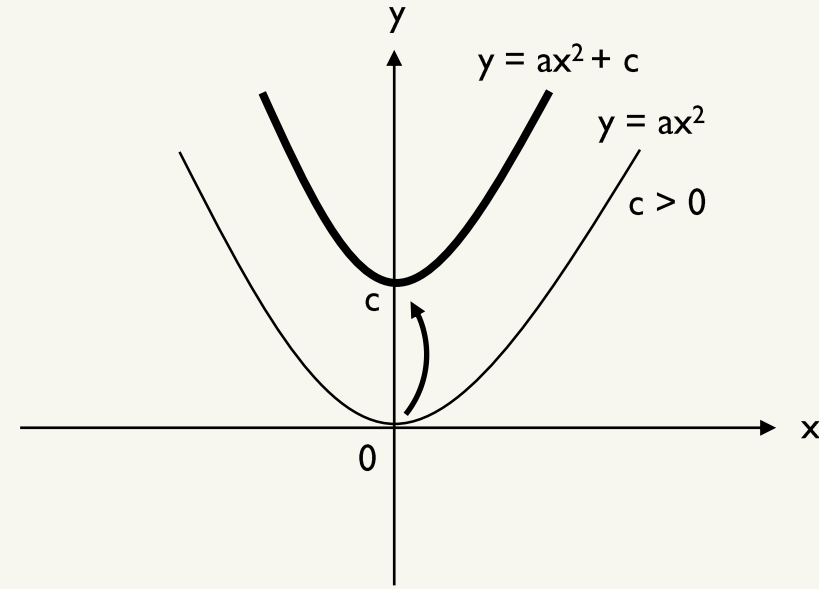
Öncelikle $y = ax^2$ parabolü çizilir. Sonra bu parabol y ekseninde $|c|$ birim kadar yukarı veya aşağı ötelenir.

$c > 0$ ise parabol yukarı doğru,
 $c < 0$ ise parabol aşağı doğru ötelenir.



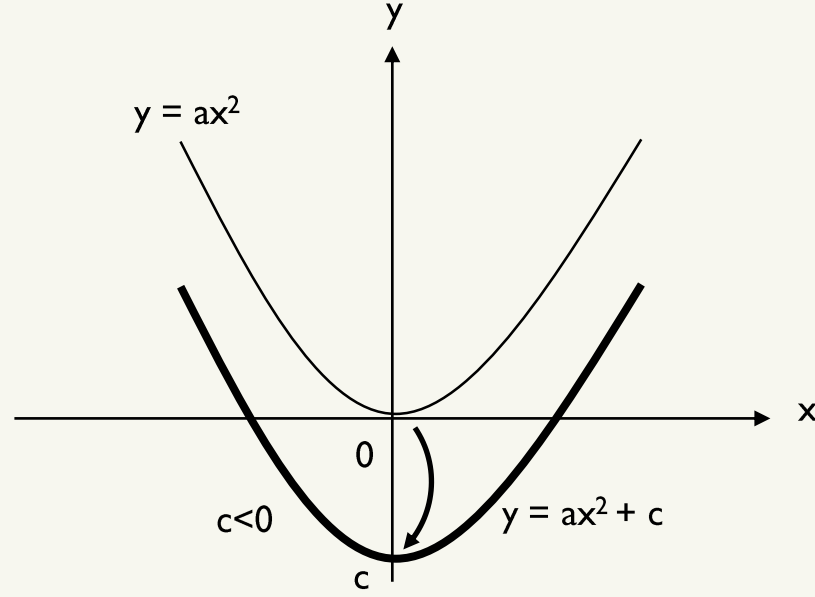
$c > 0$ ise;

- Parabol yukarı ötelendi.
- $y = ax^2$ parabolünün görüntü kümesi $[0, \infty)$ aralığıdır.
- $y = ax^2 + c$ parabolünün görüntü kümesi $[c, \infty)$ aralığıdır.



$c < 0$ ise;

- Parabol aşağı ötelendi.



ÖRNEK

$y = x^2 - 4$ parabolünü çiziniz.

ÖRNEK

$y = -x^2 + 1$ parabolünü çiziniz.

NOT

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü y eksenine göre simetrik (tepe noktası y eksenini üzerinde) ise parabol denkleminde x 'li terim bulunmaz.

Buna göre b katsayısı sıfırdır.

3) $y = ax^2 + bx$ Parabolünün Çizimi

$y = ax^2 + bx \longrightarrow y = x(ax + b)$ şeklinde yazılan parabolün x eksenini kestiği noktalar:

$$\begin{array}{l} x(ax + b) = 0 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ x_1 = 0 \qquad ax + b = 0 \longrightarrow ax = -b \\ \qquad \qquad \downarrow \\ \qquad \qquad x_2 = -\frac{b}{a} \end{array}$$

ÖRNEK

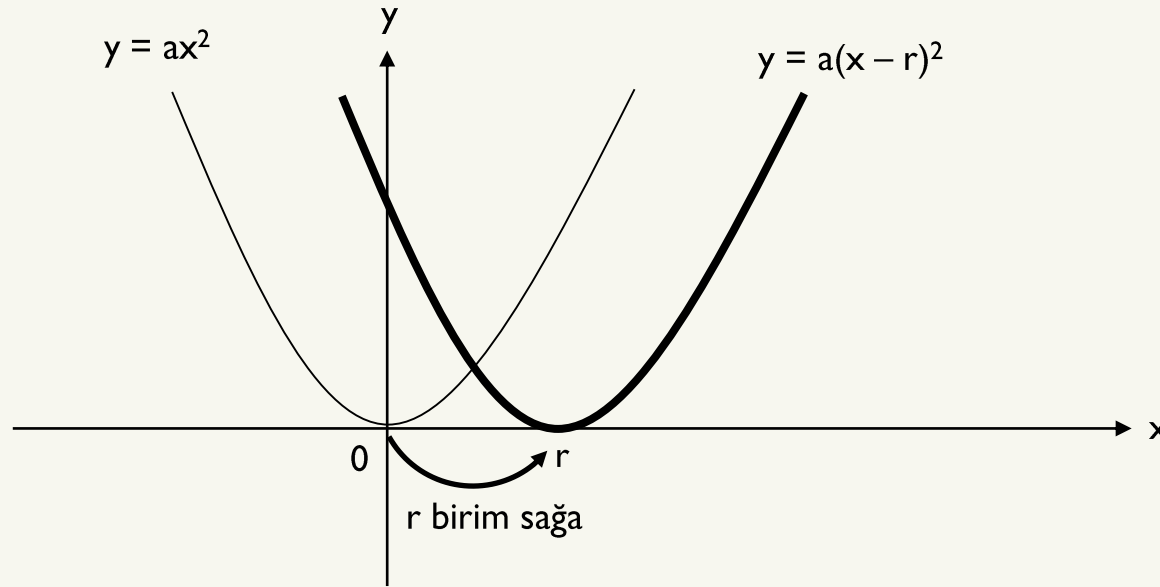
$y = 2x^2 - 4x$ parabolünü çiziniz.

4) $y = a(x - r)^2$ Parabolünün Çizimi

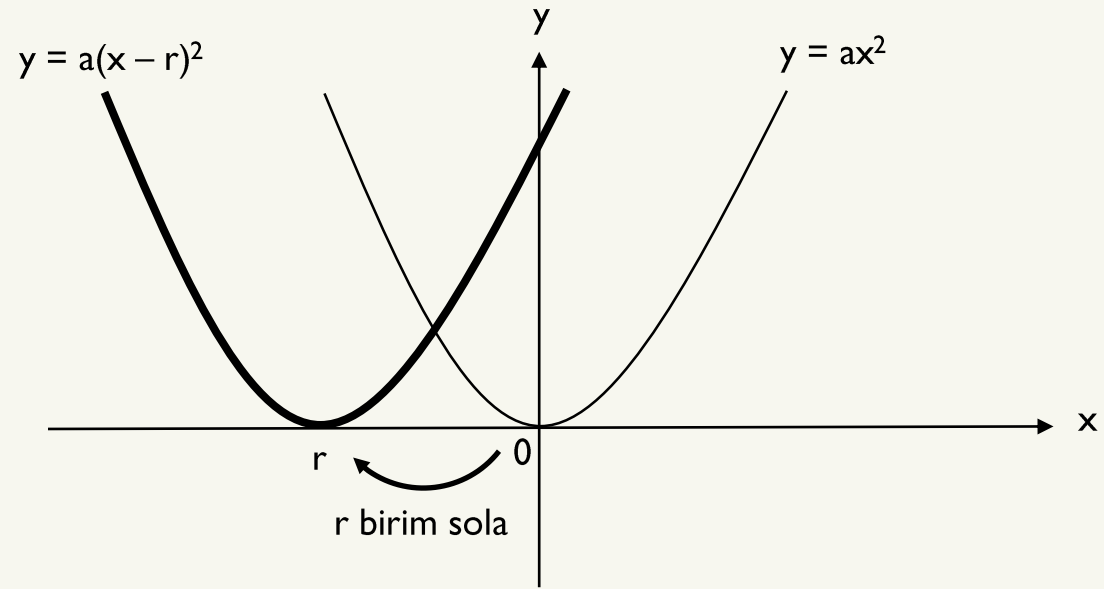
Öncelikle $y = ax^2$ parabolü çizilir, sonra bu parabol x ekseninde $|r|$ birim kadar sağa veya sola ötelenir.
 $r > 0$ ise parabol sağa doğru, $r < 0$ ise parabol sola doğru ötelenir.

$$a > 0$$

$r > 0$ ise;



$a > 0$
 $r < 0$ ise;



NOT

a) $y = a(x - r)^2$ denklemi ile verilen parabol x eksenine $x = r$ apsisli noktada teğettir.

Buna göre $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 'dır.

b) $y = a(x - r)^2$ denklemi ile verilen parabollerin tepe noktası $T(r, 0)$ şeklindedir.

ÖRNEK

$y = (x - 3)^2$ parabolünü çiziniz.

ÖRNEK

$y = 2(x + 1)^2$ parabolünü çiziniz.

5) $y = a(x - r)^2 + k$ Parabolünün Çizimi

$y = a(x - r)^2$ parabolünü y eksenini doğrultusunda $|k|$ birim kadar aşağı ya da yukarı doğru ötelediğimizde,

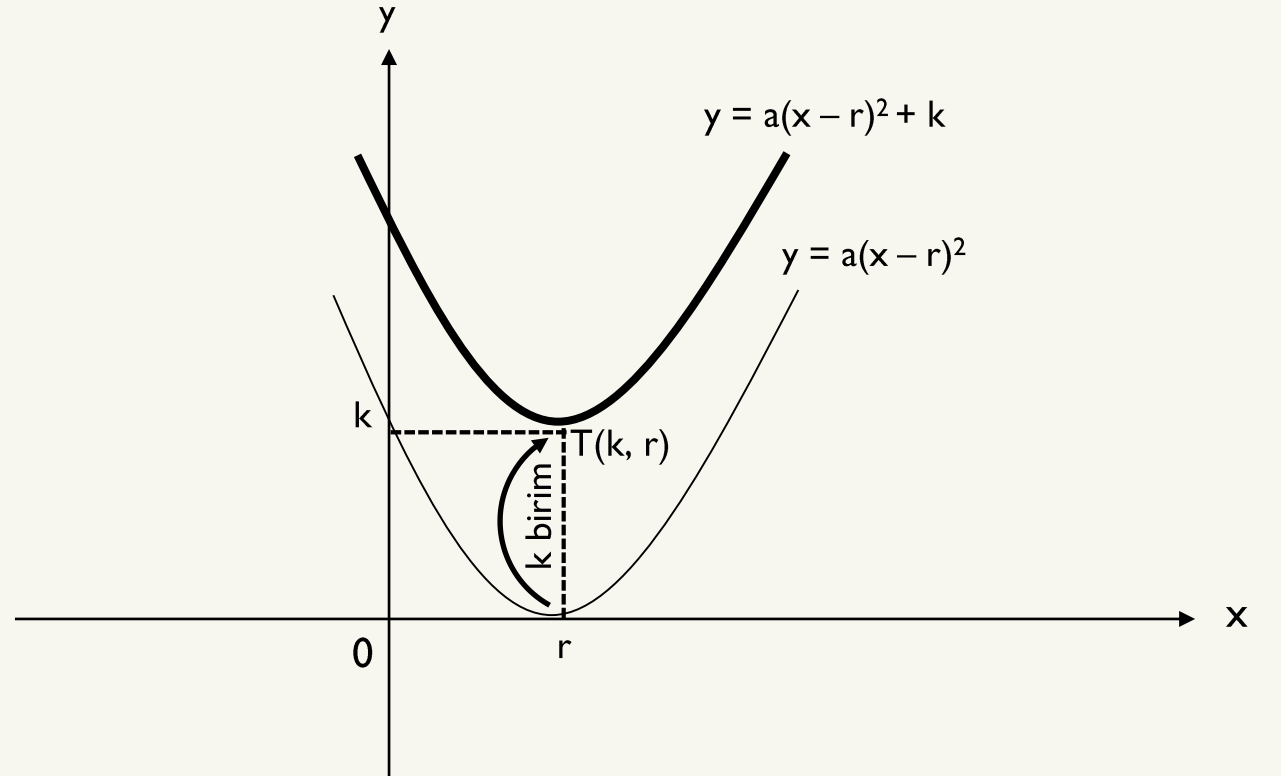
$y = a(x - r)^2 + k$ parabolünü elde ederiz.

$k > 0$ ise yukarı doğru, $k < 0$ ise aşağı doğru öteleme yaparız.

$$a > 0$$

$$r > 0$$

$k > 0$ ise;



6) $y = ax^2 + bx + c$ Parabolünün Çizimi

a) Öncelikle tepe noktası bulunur.

$$T(r, k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Tepe noktası apsisi: $r = -\frac{b}{2a}$

Tepe noktası ordinatı: $k = f(r)$ veya $k = \frac{-\Delta}{4a}$

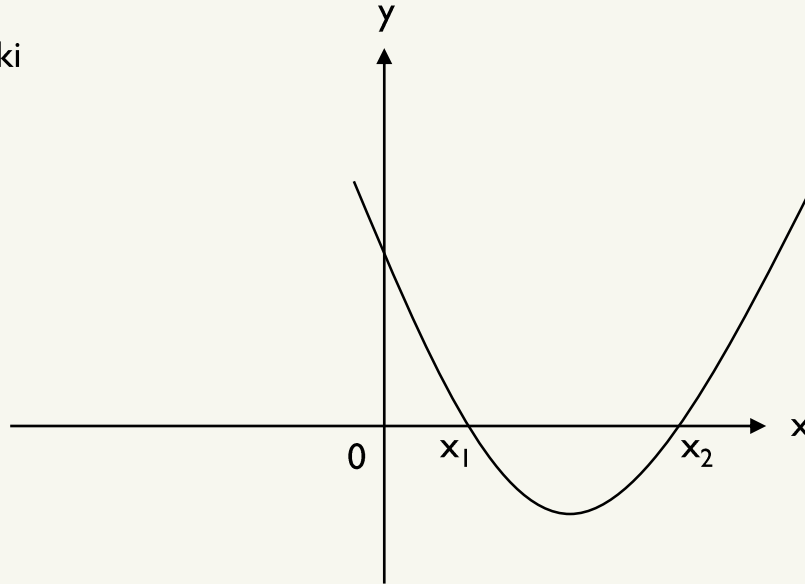
b) Daha sonra parabolün eksenleri kestiği noktalar bulunur.

$x = 0$ için $y = c$ 'dir. $(0, c)$ noktası parabolün y eksenini kestiği noktadır.

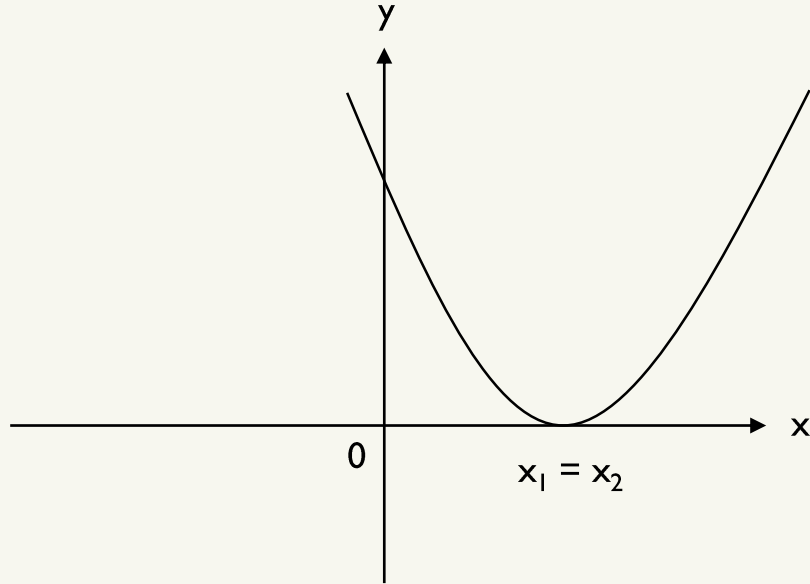
$y = 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri araştırılır. Bu denklem için Δ sayısına göre üç durum söz konusudur.

$\Delta > 0$ ise

Parabol x eksenini farklı iki noktadan keser.

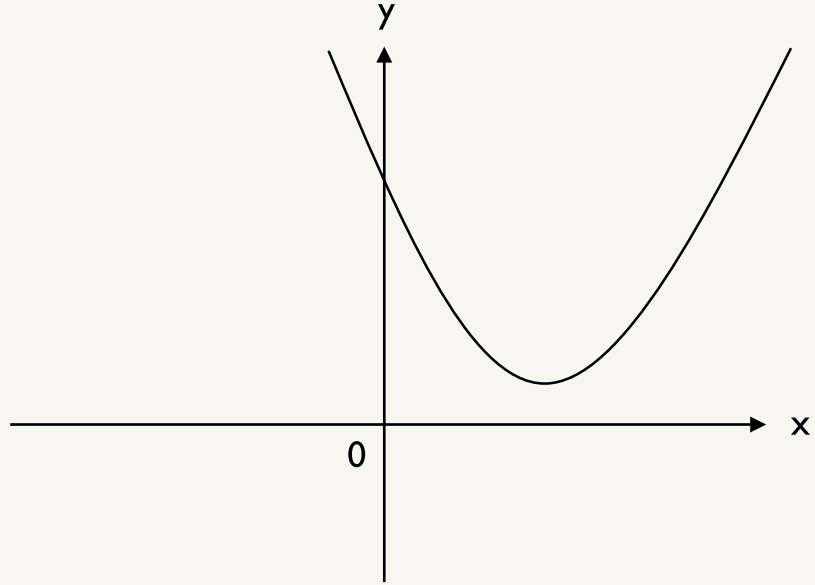


$\Delta = 0$ ise
Parabol x eksenine teğettir.



$\Delta < 0$ ise

Parabol x eksenini kesmez.



ÖRNEK

$y = x^2 - 4x - 5$ parabolünü çiziniz.

ÖRNEK

$y = -x^2 + 6x + 27$ parabolünü çiziniz.

ÖRNEK

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsislerinin toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$$3x^2 + 4x + p^2 = 0$$

denkleminin grafiği x eksenini iki noktada kestiğine göre, p'nin alacağı tam sayı değerlerini bulunuz.

ÖRNEK

$$y = x^2 + 3x + m - 1$$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre m'yi bulunuz.

ÖRNEK

$$y = -x^2 - 3x - n$$

eğrisinin x eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklık 1 olduğuna göre, n'nin kaç olacağını bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = x^2 - (m + 2)x + 2m + 1$$

parabolü x eksenine, eksenin pozitif tarafında teğet olduğuna göre m'yi bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = (m - 1)x^2 + 2mx + 3$$

ğarabolünün tepe noktasının apsisi -2 olduğuna göre, tepe noktasının ordinatını bulunuz.

ÖRNEK

$$y = x^2 - 2x + a - 5$$

parabolünün tepe noktasının ordinatı -4 olduğuna göre a 'yı bulunuz.

ÖRNEK

$$y = -2x^2 - ax - 1$$

parabolünün tepe noktası x eksenı üzerindedir. a'nın hangi değeri için tepe noktasının apsisi pozitif olur?

ÖRNEK

Parametrik denklemleri $x = m - 3$, $y = m^2 + 2$ olan parabolün tepe noktası $T(r, k)$ ise $r + k$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$y = 2x^2 - kx + 4$ parabolünün tepe noktası y ekseninde ise k 'yi bulunuz.

ÖRNEK

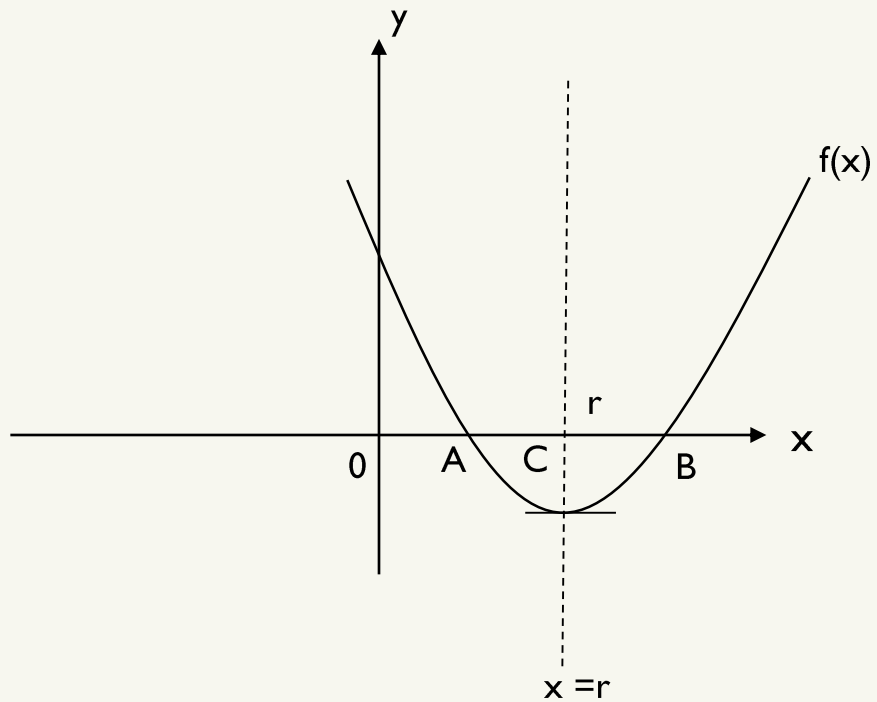
$y = 2x^2 + mx + 1$ parabolünün tepe noktası $y = -x$ doğrusu üzerinde ise m 'nin alacağı değerlerin toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^2 + 3m$ ve $y = 4x^2 - 7$ parabollerinin tepe noktası arasındaki uzaklık 10 birim ise m 'yi bulunuz.

NOT:

Simetri Eksen: Parabolün T tepe noktasından y eksenine paralel çizilen doğrudur.



- Görüntüsü eşit olan iki nokta, $x = r$ doğrusuna eşit uzaklıktadır.

$|AC| = |CB|$ olur.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 2px + 6$ eğrisinin simetri eksenini $x = 6$ doğrusu ise p 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = (m + 1)x^2 + 4x + m - 2$$

fonksiyonu $(1, 9)$ noktasından geçtiğine göre, bu fonksiyonun simetri eksenini bulunuz.

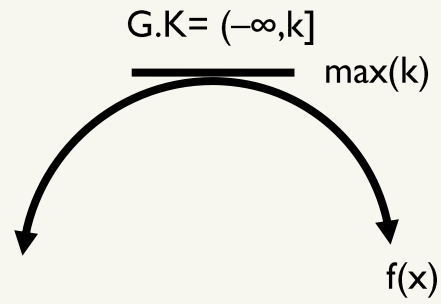
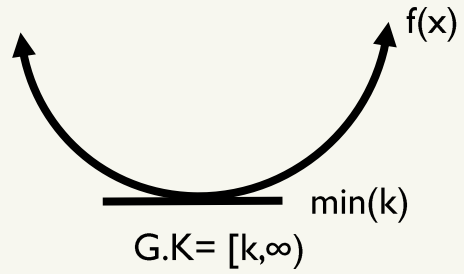
ÖRNEK

$$f(x) = (m - 1)x^2 + (m^2 + 3m - 10)x + 7$$

parabolü x eksenini orijine eşit uzaklıkta simetrik iki noktada kesiyorsa m'yi bulunuz.

NOT

Parabolün en büyük veya en küçük değeri sorulursa tepe noktasının k 'sine bakılır.



ÖRNEK

$f(x) = -x^2 + 6x + 10$ fonksiyonunun en büyük değerini bulunuz.

ÖRNEK

$y = 3x^2 + 6x + 5$ parabolünün en küçük değerini bulunuz.

ÖRNEK

$A = \{(x,y): y = -x^2 - 4x - 5\}$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

ÖRNEK

$$f: [-8, -4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x) = x^2 + 12x + 5$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerinin toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 5 - x^2$ parabolünün $[3, 5)$ aralığında alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÖRNEK

x reel bir sayı olmak üzere,

$$A = x^2 + 4x + 5$$

$B = x^2 - 8x + 1$ olduğuna göre $A+B$ toplamının en küçük değerini bulunuz.

ÖRNEK

a bir pozitif gerçel sayı olmak üzere, kenarları $3a$ cm ve $(6 - 3a)$ cm olan dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 'dir?

ÖRNEK

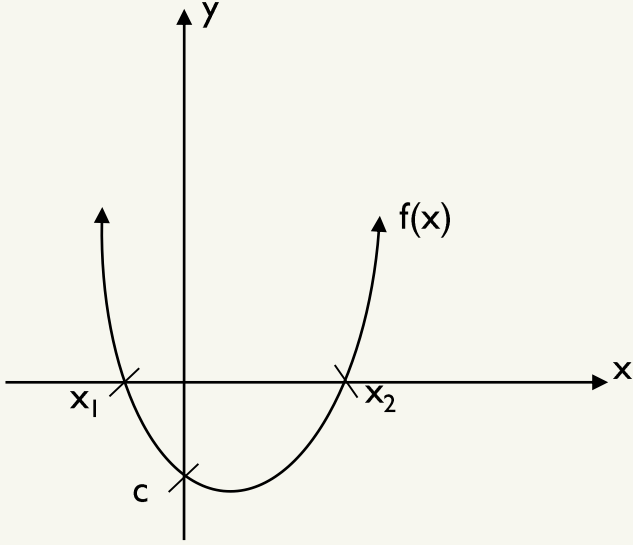
Bir ceket $(-m + 6)$ TL 'ye alınıp $(-m^2 + 9m + 16)$ TL 'ye satılıyor. Bu satıştan elde edilen kâr en çok kaç TL 'dir?

ÖRNEK

$f(x) = (m - 1)x^2 + 2mx + 1$ fonksiyonu $x = -2$ noktasında minimum değer aldığına göre m 'yi bulunuz.

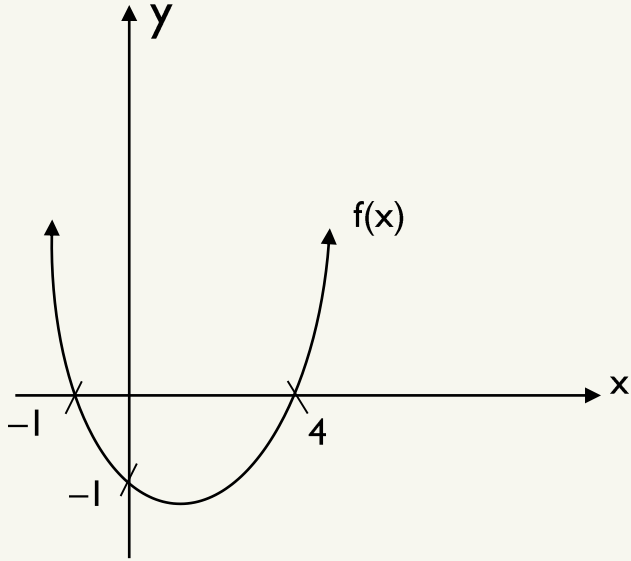
Parabol Denklemi Yazma

X Eksenini Kestiği Noktaları Bilinen Parabolün Denklemi



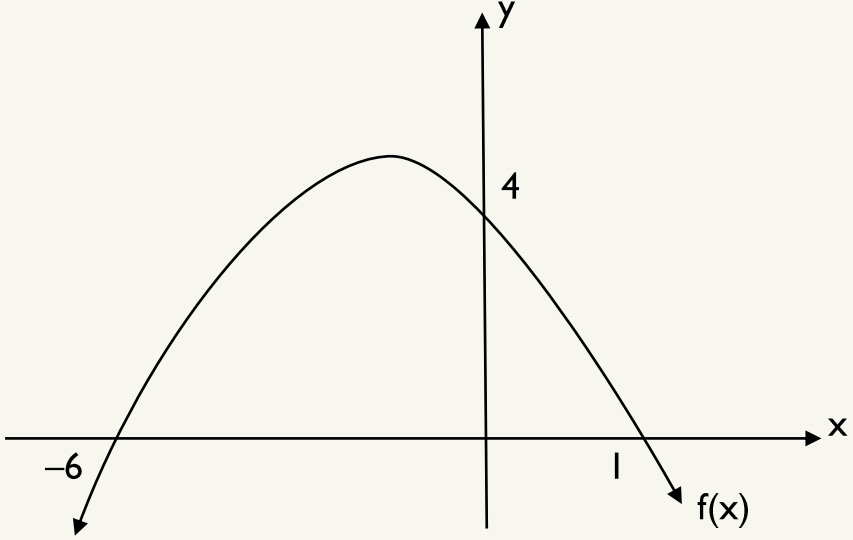
$f(x) = a \cdot (x - x_1) (x - x_2)$ ve a'yı bulmak için verilen özel noktayı kullanınız.

ÖRNEK



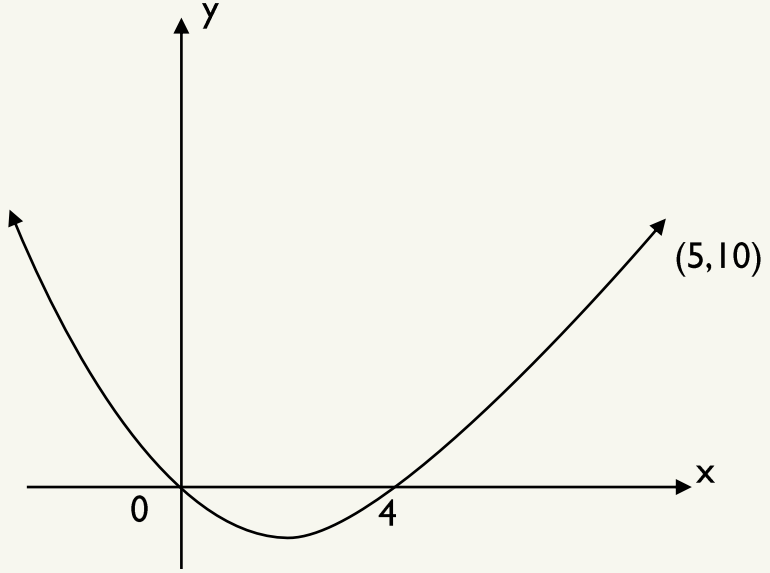
Grafiği verilen parabolün denklemini bulunuz.

ÖRNEK



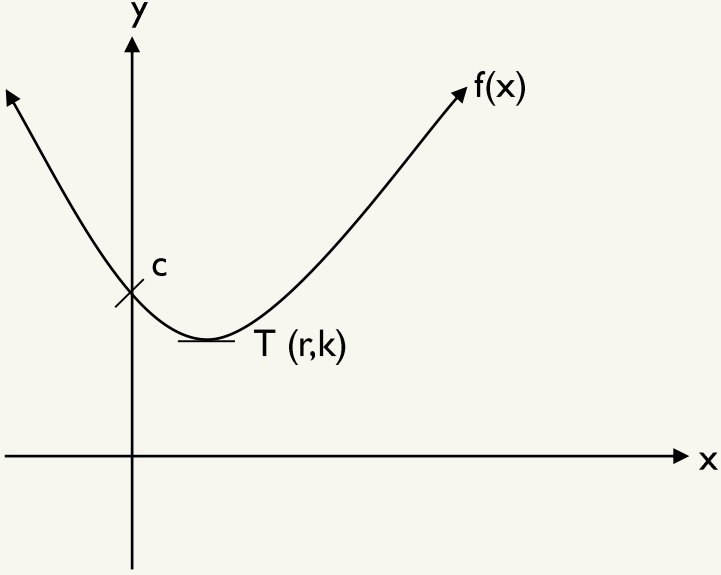
Grafiği verilen $f(x)$ parabolünde $f(10)$ 'un değerini bulunuz.

ÖRNEK



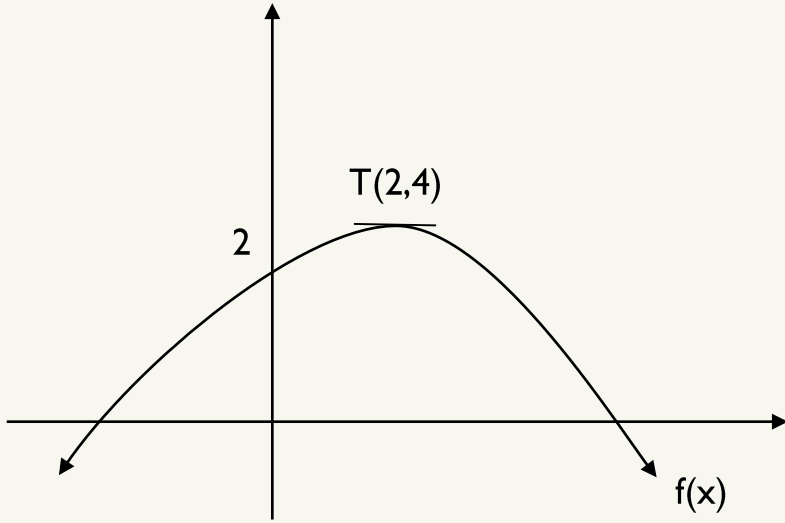
Grafiği verilen $f(x)$ parabolünün denklemini kurunuz.

Tepe noktası bilinen parabolün denklemi



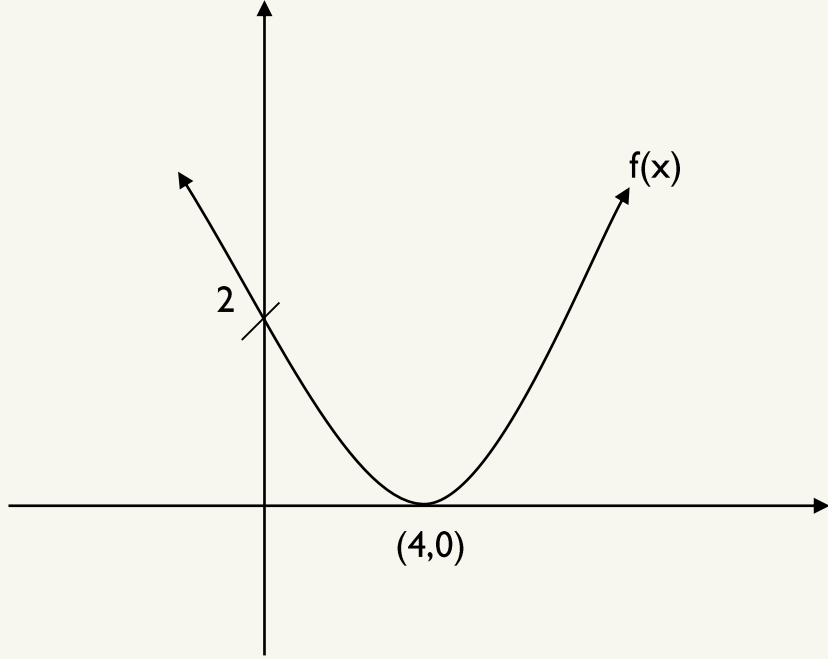
$f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ ve a 'yı bulmak için verilen özel noktayı kullanırız.

ÖRNEK



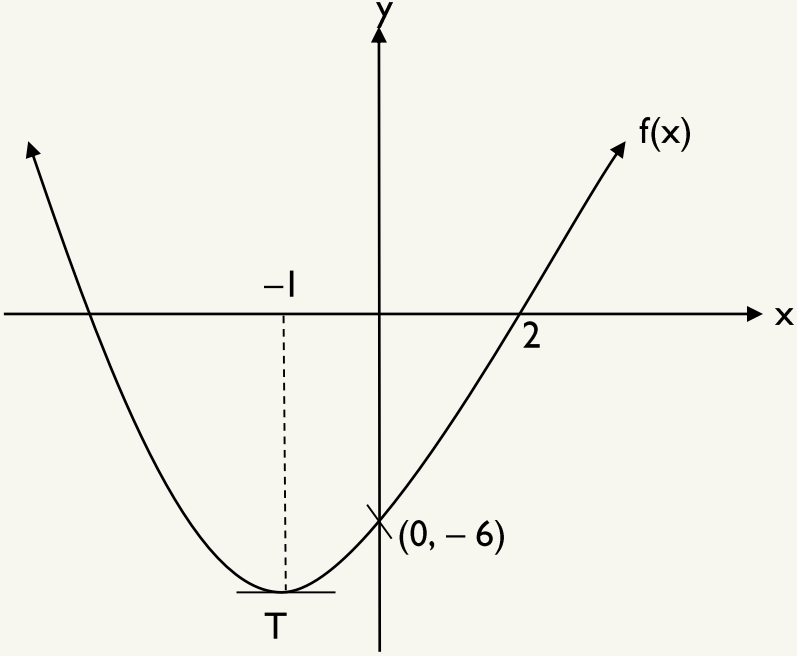
Grafiği verilen $f(x)$ parabolünün denklemini kurunuz.

ÖRNEK



Grafiği verilen $f(x)$ parabolünün denklemini kurunuz.

ÖRNEK



Grafiği verilen $f(x)$ parabolünde $f(4)$ 'ün değerini bulunuz.

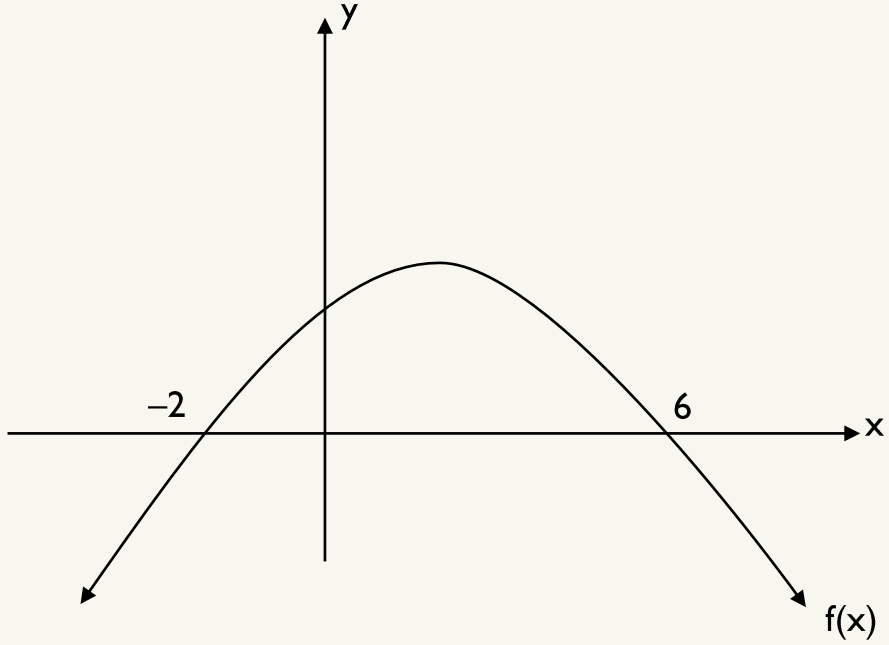
Üç Noktası Bilinen Parabolün Denklemi

Verilen 3 nokta $f(x) = ax^2 + bx + c$ denkleminde ayrı ayrı yerine yazılarak a, b ve c katsayıları bulunur.

ÖRNEK

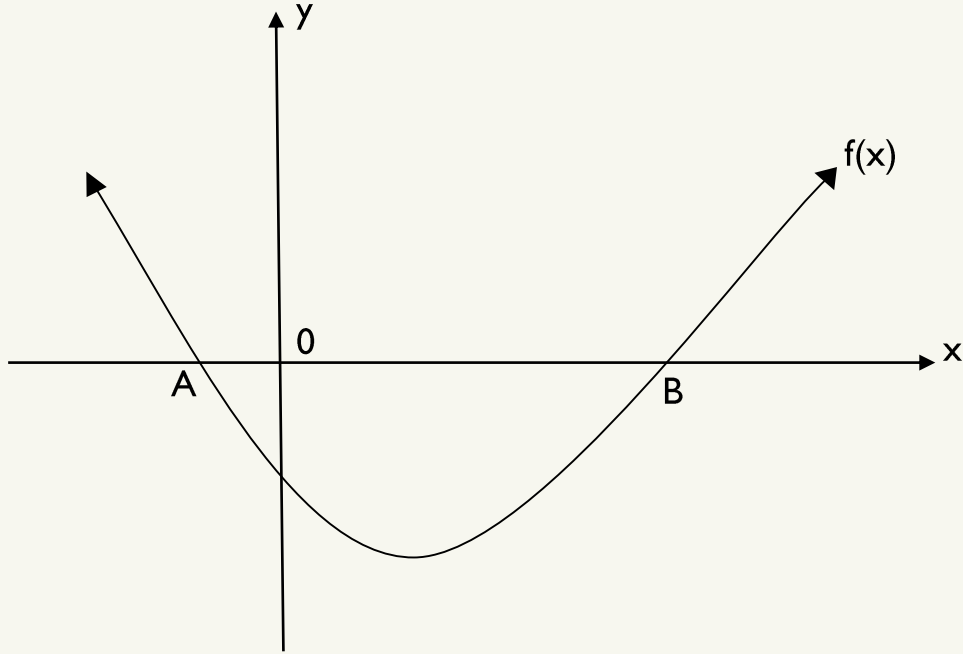
A (3 , 0) , B (−1 , 8) , C (0 , 12) noktalarından geçen parabolün denklemini kurunuz.

ÖRNEK



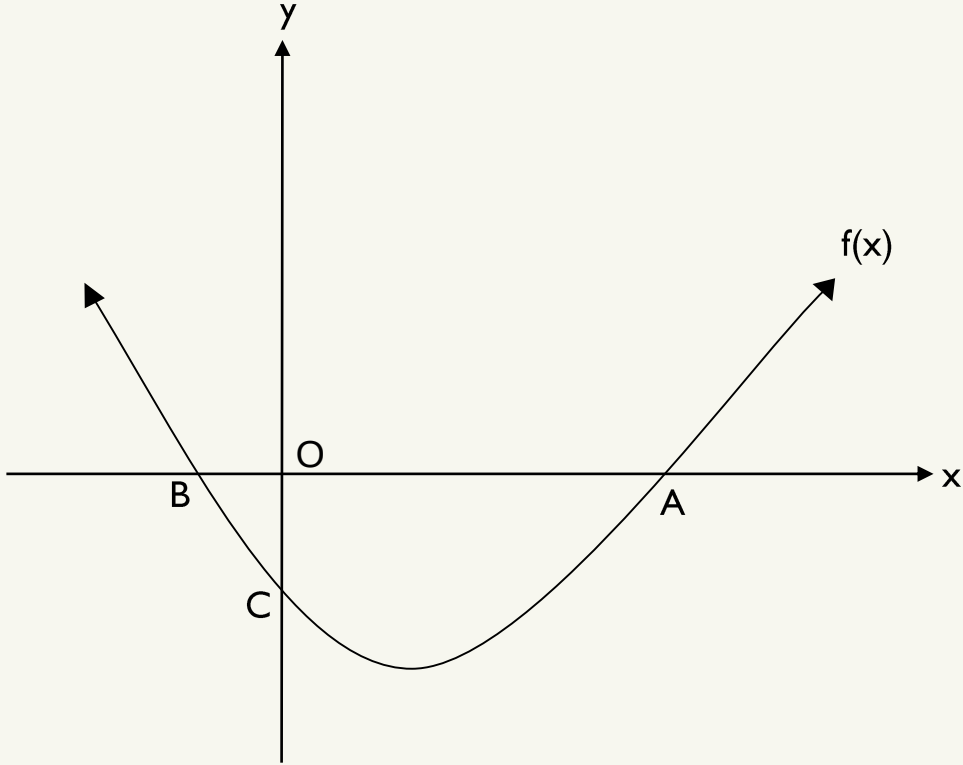
$f(x) = -x^2 + mx + n$ parabolünün grafiği şekildeki gibidir. Buna göre $m - n$ değerini bulunuz.

ÖRNEK



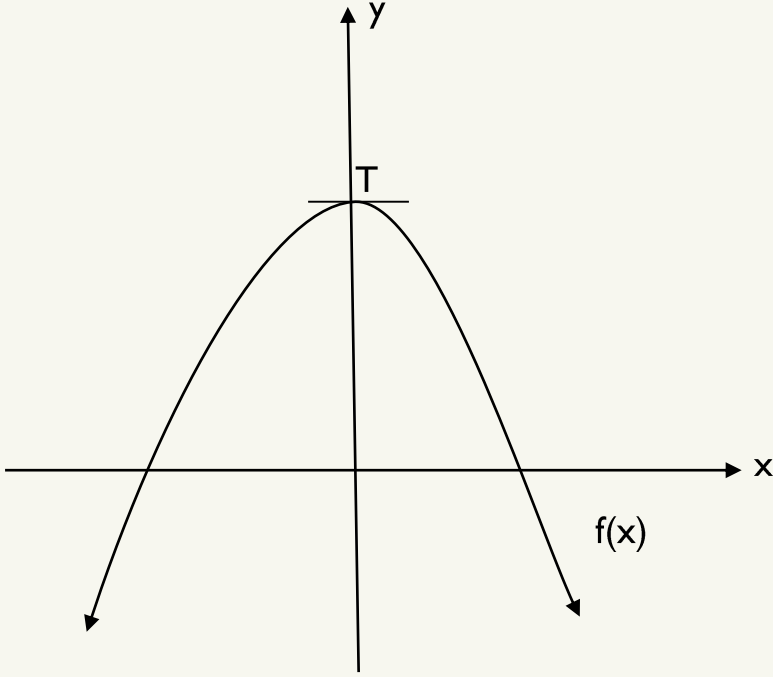
$f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ parabolünün grafiği şekildeki gibidir. $|AB| = 10$ olduğuna göre m 'yi bulunuz.

ÖRNEK



$y = x^2 - 6x + m + 6$ parabolünün grafiği şekildeki gibidir. $|OA| = 5 |OB|$ olduğuna göre $|OC|$ 'yi bulunuz.

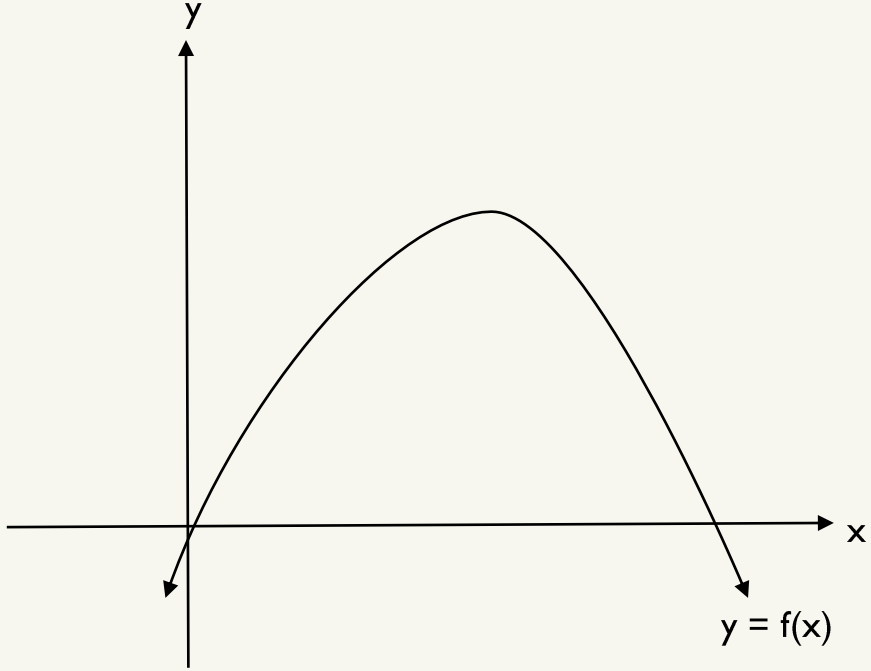
ÖRNEK



$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiği verilmiştir.

Buna göre a , b , c ve Δ hakkında ne söylenebilir?

ÖRNEK

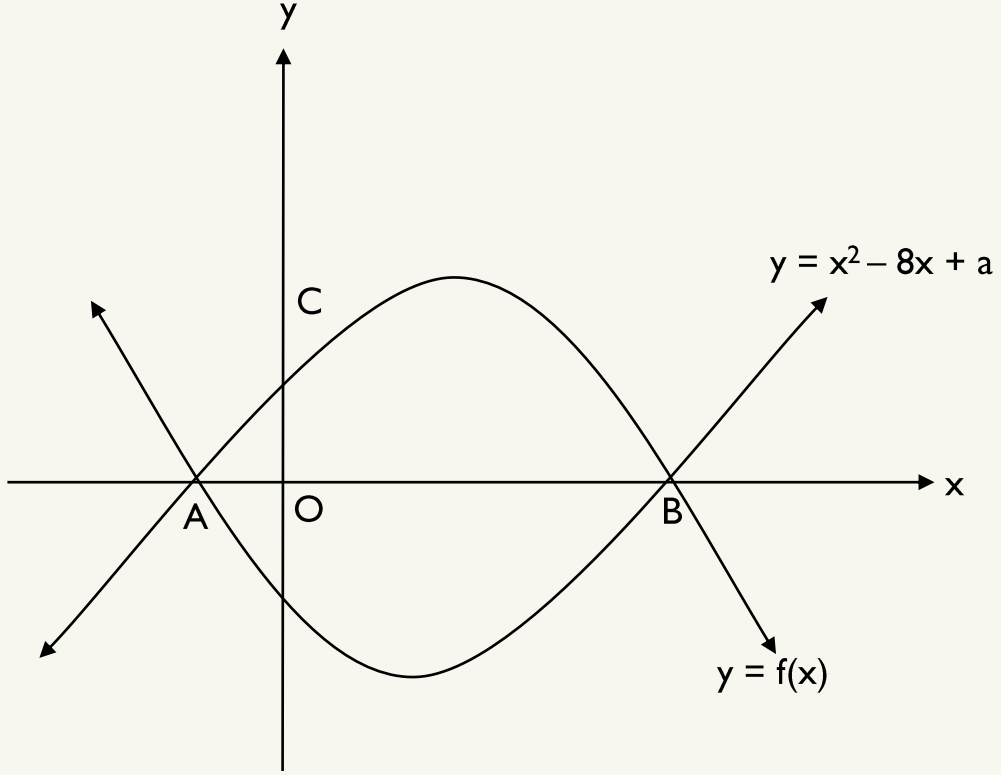


$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiği verilmiştir. Buna göre a , b , c ve Δ hakkında ne söylenebilir?

ÖRNEK

$y = -x^2 + 2x + 24$ parabolünün tepe noktası T, x eksenini kestiği noktalar A ve B olduğuna göre $A(\overset{\Delta}{BTA})$ kaçtır?

ÖRNEK

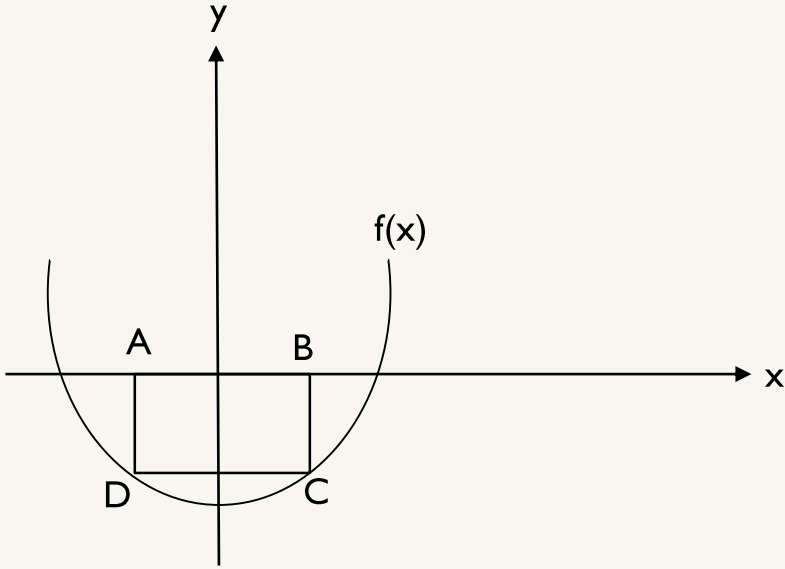


Yandaki şekilde $|AB| = 12$ cm, $|OC| = 20$ cm

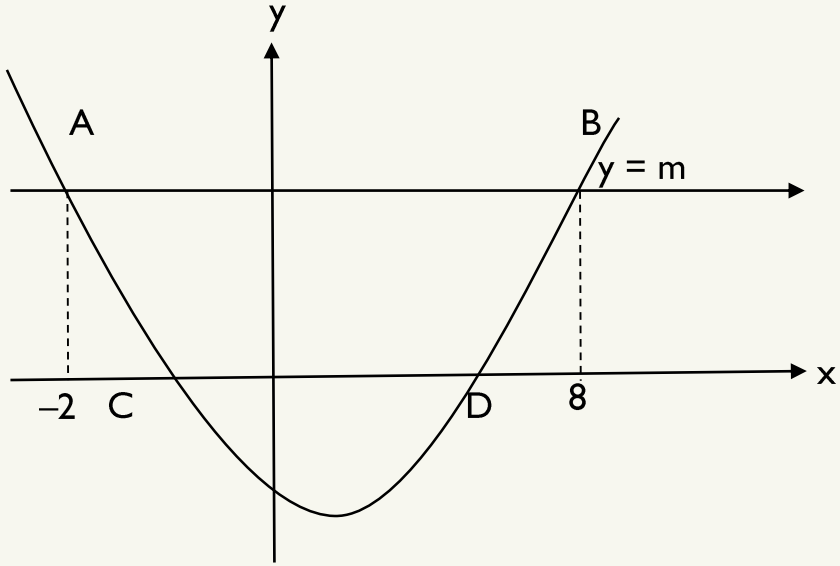
olduğuna göre, $f(x)$ 'in maksimum değerini bulunuz.

ÖRNEK

Şekilde köşeleri $y = x^2 - 15$ parabolü üzerinde bulunan ABCD karesinin alanını bulunuz.



ÖRNEK



Yandaki şekilde köşeleri $y = m$ doğrusu ile $y = f(x)$ parabolünün kesim noktaları olan A ve B'nin apsisleri verilmiştir. Buna göre C ve D apsisler toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^2 + (m - 3)x + (m + 4)$ parabollerinin geçtiği sabit noktanın koordinatlarını bulunuz.

ÖRNEK

$y = 2x^2 - mx + m - 1$ parabollerinin tepe noktalarının geometrik yer denklemini bulunuz.

Parabol İle Doğrunun/Parabolün Durumları:

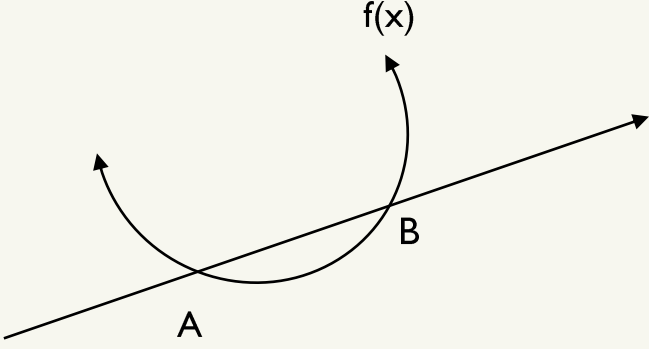
$y = ax^2 + bx + c$ ile $y = mx + n$ doğrusunun birbirleriyle ilgili durumlarını incelemek için, denklemlerini ortak çözeriz.

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$

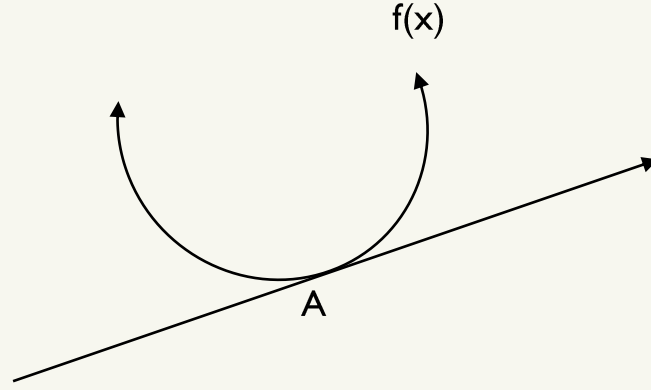
$$ax^2 + bx - mx + c - n = 0$$

$$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$$

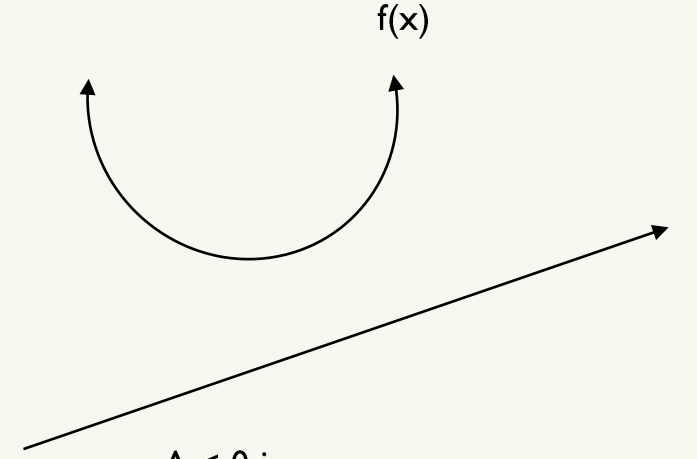
denkleminin Δ 'sına bakılır.



$\Delta > 0$ ise
parabol ile doğru
iki noktada kesişir.



$\Delta = 0$ ise
parabol ile doğru
teğettir.



$\Delta < 0$ ise
parabol ile doğru kesişmez.

ÖRNEK

$y = x^2 + 3x + m$ parabolü ile $y = x + 3$ doğrusunun farklı 2 noktada kesişmeleri için m 'nin en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 + (2 - k)x + 3$ parabolü ile $y = x - 1$ doğrusu birbirlerine teğet ise k 'nin negatif değerini bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^2 + kx + 5$ parabolü ile $y = x + 1$ doğrusunun kesişmemelerini sağlayan k 'nin minimum değerini bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^2 - 3x - 4$ parabolü ile $y = x - 4$ doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^2 - 2x - 3$ parabolü ile $y = x + 1$ doğrusu A ve B noktalarında kesişiyor ise $|AB|$ uzunluğunu bulunuz.

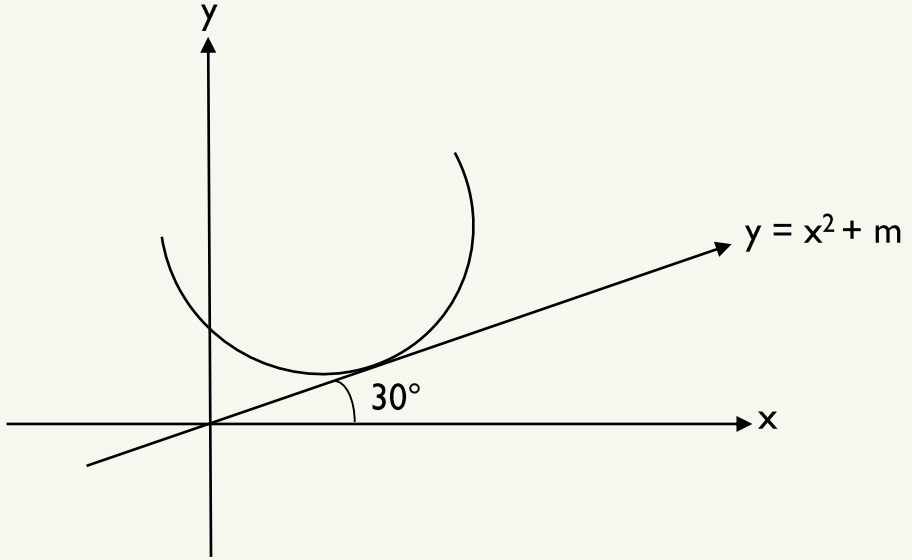
ÖRNEK

$y = x^2 + mx + 4$ parabolü ile $y = 3x - 8$ doğrusu $(2, -2)$ noktasına göre simetrik 2 noktada kesişiyorlarsa m 'yi bulunuz.

ÖRNEK

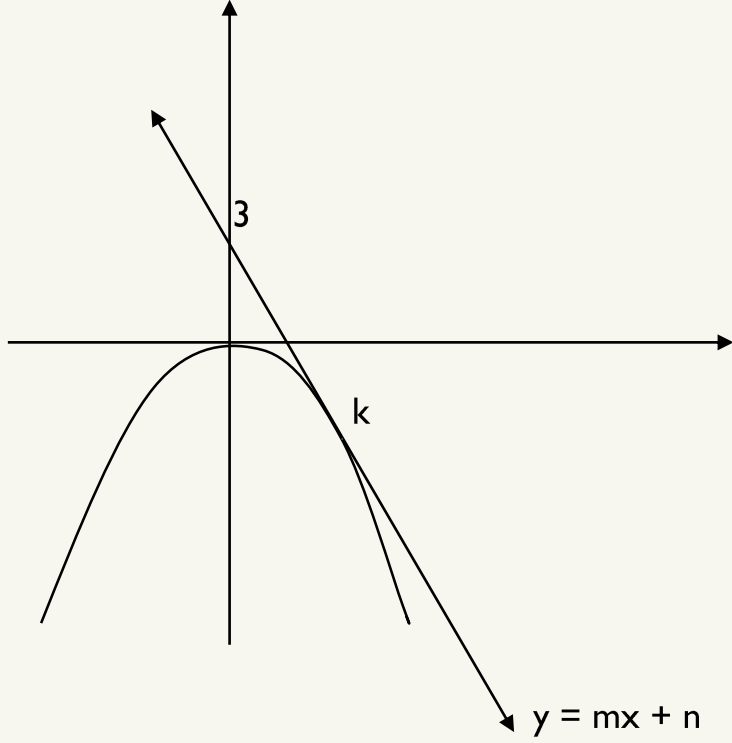
$f(x) = -x^2 + (m - 3)x + n - 2$ parabolü, $x = 2$ apsisli noktada $y = -2$ doğrusuna teğet olduğuna göre n 'yi bulunuz.

ÖRNEK



Yandaki şekle göre m'yi bulunuz.

ÖRNEK



Yanda grafiği verilen $y = -3x^2$ parabolü ile doğru, k noktasında birbirine teğet ise k'nin koordinatlarını bulunuz.

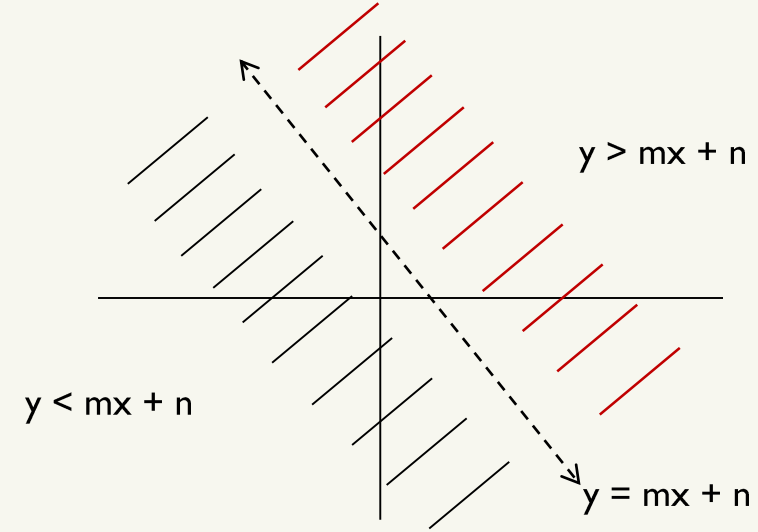
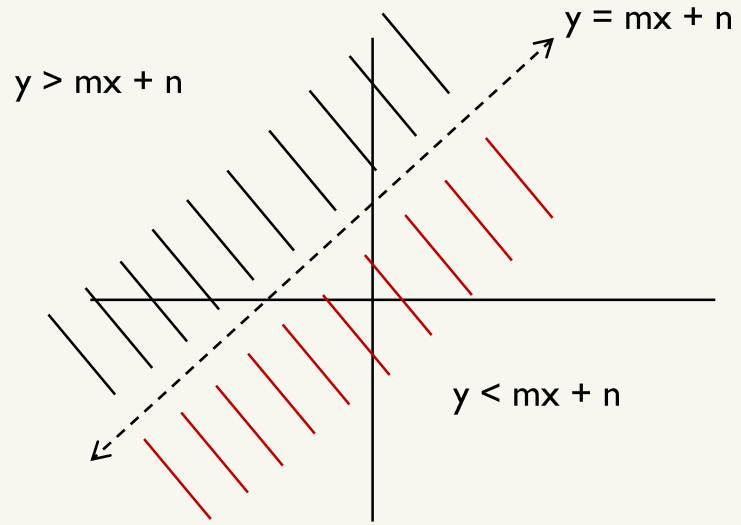
ÖRNEK

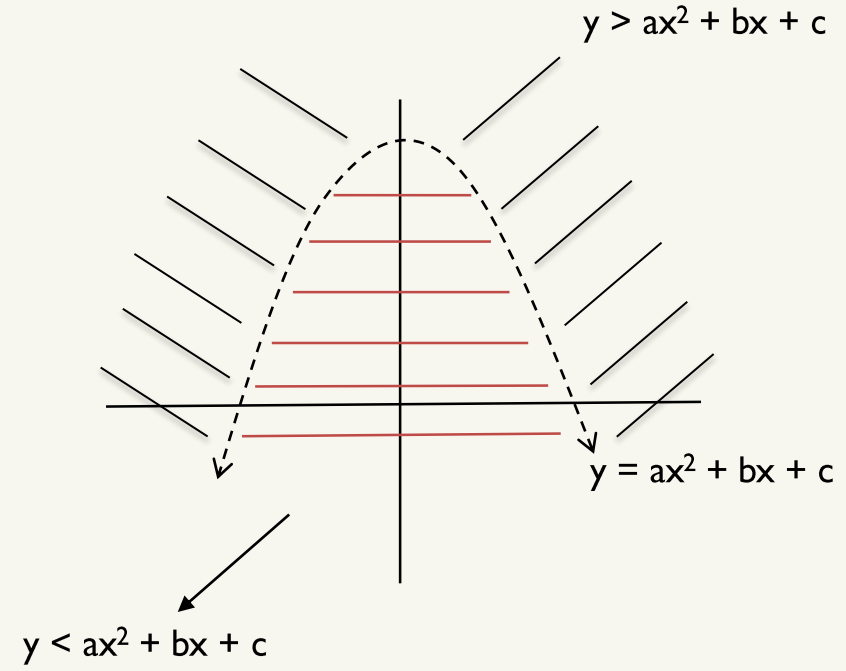
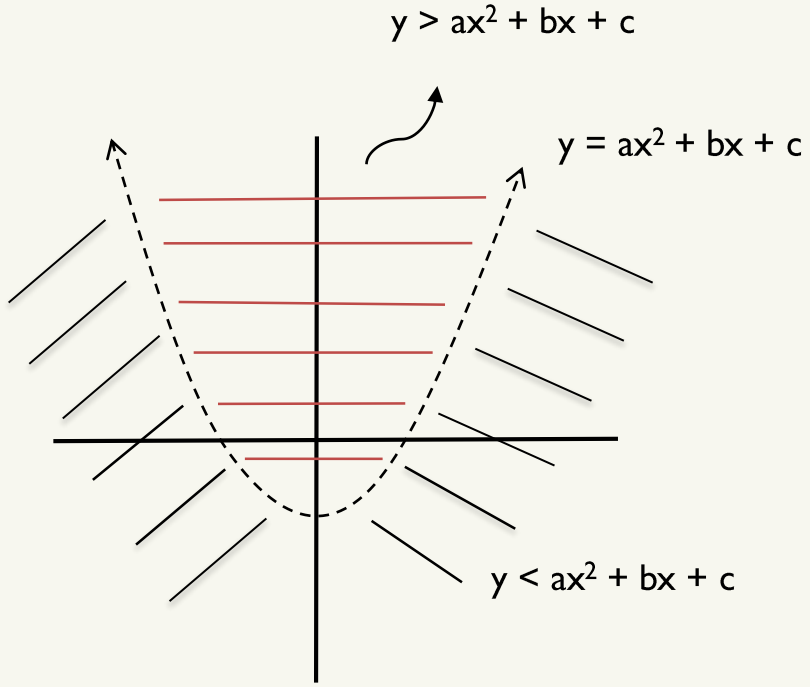
$y = x^2 - 2x + 5$ parabolünün $y = 4x - 5$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÖRNEK

$y = 3x^2 - 2x + 5$ parabolü ile $y = x^2 - x + 8$ parabolünün kesim noktalarının apsisleri çarpımını bulunuz.

İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler





NOT

Eşitsizliklerde $>$ veya $<$ sembolü kullanılmışsa kesikli çizgi, $\leq$ veya $\geq$ sembolü kullanılmışsa düz çizgi kullanılarak grafik çizilir.

ÖRNEK

$y \leq x^2 - x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÖRNEK

$y > x^2 - x - 6$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÖRNEK

$y < -x^2 + 16$ ve $y \geq x - 3$ eşitsizliklerini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösteriniz.