



MAT 2

POLİNOMLAR

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ifadesine n . dereceden reel katsayılı ve bir değişkenli (çok terimli) polinom denir.

Burada,

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ polinomun katsayıları,

$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ polinomun terimleri,

$P(x)$ polinomunu oluşturan terimlerden derecesi en büyük olanın derecesine polinomun derecesi denir. $P(x)$ polinomunun derecesi $\deg[P(x)]$ ile gösterilir.

Derecesi en büyük olan terimin katsayısına polinomun başkatsayısı denir.

Derecesi sıfır olan terime de polinomun sabit terimi denir.

ÖRNEK:

$P(x) = 2x^6 - 8x^3 + 5x^2 - 6x + 2$ polinomunun,

Terimleri: $2x^6, -8x^3, 5x^2, -6x, 2$

Katsayıları: $2, -8, 5, -6, 2$ 'dir.

Derecesi: 6 'dır.

Başkatsayısı: 2 'dir.

Sabit terimi: 2 'dir.

ÖRNEK:

Başkatsayısı -3 olan, 3. dereceden, sabit terimi 4 ve derecesi 2 olan terimin katsayısı 5 olan 3 terimli polinomu bulunuz.

ÖRNEK:

Aşağıda verilen ifadelerden hangileri polinomdur?

$$P(x) = 5x^2 - 7x$$

$$Q(x) = \frac{8}{x^4} - 7x^2 - 3x + 6$$

$$R(x) = 3x^6 + 3\sqrt[3]{x} + 4$$

$$S(x) = 5$$

$$M(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 4\sqrt{2x} + \sqrt{13}$$

ÖRNEK:

$P(x) = 2 \cdot x^{n+3} + 5 \cdot x^{4-n} + 4$ ifadesinin polinom belirtmesi için n yerine gelebilecek sayıları bulunuz.

ÖRNEK:

$P(x) = 2.x^{\frac{10}{n+2}} + 4.x^{5-n} + 3$ polinomunun derecesi en fazla kaç olabilir?

ÖRNEK:

$P(x) = \frac{3x^4 + 4x^3 + (a+1)x + (b-3)}{x^2}$ ifadesi bir polinom belirttiğine göre $a + b$ kaçtır?

SABİT POLİNOM:

Sabit terim dışındaki bütün terimleri 0 olan polinomdur.

$$P(x) = c = \text{sabit } (c \in \mathbb{R} - \{ 0 \})$$

“Sabit polinomda x ‘li terim bulunmaz.”

“Sabit polinomun derecesi sıfırdır.”

ÖRNEK:

$P(x) = (3m-n)x^3 + (m-p+2)x^2 + (p-6)x + 5+n$ polinomu sabit polinom ise $P(2014)$ kaçtır?

SIFIR POLİNOMU

Bütün terimleri 0 olan polinomdur.

“Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir. (tanımlanmamıştır.)”

ÖRNEK:

$P(x) = (a-3)x^3 + (b+2)x^2 + (c-1)x + d-4$ polinomu sıfır polinomu ise $a+b+c+d$ toplamı kaçtır?

POLİNOM FONKSİYONLAR

Polinomlar $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı fonksiyonlar olduğundan fonksiyonlarda yaptığımız bazı işlemleri burada da yapabiliriz.

Bir polinomda x yerine uygun koşullarda her şey yazılabilir.

ÖRNEK:

$P(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$ polinomunda $P(2)$ kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = x^2 - ax + 3$ polinomunda $P(-1) = 3$ ise a kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x+3) = x^3 - 2x + a$ polinomunda $P(0) = 15$ ise a kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = x^2 - 2x + 3$ ise $P(x+1)$ polinomunu bulunuz.

ÖRNEK:

$P(x-2) = 2x^2 - 4x + 6$ ise $P(x)$ polinomunu bulunuz.

ÖRNEK:

$P(2x+1) = 4x^2 - 2x + 1$ ise $P(x-1)$ polinomunu bulunuz.

POLİNOMLARDA SABİT TERİM

Hangi polinom olursa olsun, sabit terimi bulmak için x yerine 0 yazılır.

$P(x)$ 'in sabit terimi = $P(0)$

$P(x - 1)$ 'in sabit terimi = $P(-1)$

$P(3x+1)$ 'in sabit terimi = $P(1)$ olur.

POLİNOMLARDA KATSAYILAR TOPLAMI

Hangi polinom olursa olsun, katsayılar toplamını bulmak için x yerine 1 yazılır.

$P(x)$ 'in katsayılar toplamı $= P(1)$

$P(x-1)$ 'in katsayılar toplamı $= P(0)$

$P(2x+1)$ 'in katsayılar toplamı $= P(3)$ olur.

NOT: Bir $P(x)$ polinomunda,

a) Çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı;

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2}$$

b) Tek dereceli katsayıların toplamı;

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} \text{ ile bulunur.}$$

ÖRNEK:

$P(x) = (3x^2 - 2x + 4)^2$ polinomunun katsayıları toplamı a ve sabit terim b olduğuna göre a-b kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomunun sabit terimi 3 'tür.

$P(x+2) = 4x^2 - 3x + 5a$ olduğuna göre a kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x+1)$ polinomunun katsayıları toplamı 2 'dir.

$P(x-1) = x^2 - 3ax + 11$ olduğuna göre $P(-1)$ kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x-3)$ polinomunun sabit terimi 1 'dir.

$P(x+1) = 3x + a$ ise $P(2x-1)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

ÖRNEK:

$(1 - x + x^2)^{10} = a_0 + a_1 + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$ olduğuna göre, çift indisli katsayıların toplamı olan $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$ kaçtır?

2009 ÖSS

ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLAR

$x, y, z, \dots$ değişkenler olmak üzere;

İki değişkenli polinom $P(x, y)$

Üç değişkenli polinom $P(x, y, z)$ ile gösterilir.

ÖRNEK:

$P(x, y) = x^2y^3 - 3xy^2 + xy + 3x$ polinomunda $P(1, -1)$ kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x, y) = (4x^2 - 3y + 3)^3$ polinomunun katsayıları toplamı ve sabit terimi kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x, y, z) = 3x^2y^3z + 4xy^4z^2 - 8xyz + 9x^5$ polinomunun derecesi ve başkatsayısı kaçtır?

İKİ POLİNOMUN EŞİTLİĞİ

Dereceleri eşit olan iki polinomun aynı dereceden olan terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır.

ÖRNEK:

$$P(x) = (m+2)x^3 + 6x^2 + 9x + n+3$$

$$Q(x) = 5x^3 + (s^3 - 2)x^2 + (k+4)x + 1 \text{ polinomları eşit olduğuna göre } m+n+s+k \text{ toplamı kaçtır?}$$

ÖRNEK:

$$P(x) = (m^3 - 1)x^3 + 6x + m + n + p$$

$$Q(x) = (n - 4)x^2 + (p + 2)x + s \text{ polinomları eşit olduğuna göre } s \text{ kaçtır?}$$

ÖRNEK:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için;

$6x^2 + kx + 2 = (2x+b) \cdot (cx - 1)$ olduğuna göre $k+b+c$ toplamı kaçtır?

ÖRNEK:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için;

$A(x^2-x) + B(x^2+x) + C(x^2-1) = 6x+2$ olduğuna göre A.B.C kaçtır?

ÖRNEK:

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} \text{ olduğuna göre } A+B \text{ kaçtır?}$$

ÖRNEK:

$P(x)$ bir polinom olmak üzere;

$P(x+1) + P(x+2) = 4x+6$ olduğuna göre $P(3)$ kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ bir polinom olmak üzere,

$P(x) + P(x-2) = 2x^2 - 4x + 8$ olduğuna göre $p(1)$ kaçtır?

POLİNOMLARDA İŞLEMLER

I) Polinomlarda Toplama – Çıkarma:

İki polinomun toplamını ve farkını bulmak için aynı dereceli terimlerin katsayıları ile işlem yapılır.

ÖRNEK:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3$$

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ polinomları veriliyor. Buna göre;

- a) $P(x) + 2Q(x)$ toplamını bulunuz.
- b) $Q(x) - 3P(x)$ farkını bulunuz.

2) Polinomlarda Çarpma:

Bir polinomu diğer bir polinomla çarpmak için çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğinden yararlanılır.

ÖRNEK:

$(2x^4 + 3x^3 + 2x - 2) \cdot (3x^3 + 9x^2 - 5x + 2)$ çarpımı yapıldığında x^5 'li terimin katsayısı kaçtır?

NOT: Polinomlarda Derece Kavramı:

$\text{der } [P(x)] = m$, $\text{der } [Q(x)] = n$ ve $m > n$ olsun.

a) $\text{der } [P(x) \pm Q(x)] = m$ (Derecesi büyük olan alınır.)

b) $\text{der } [P(x) \cdot Q(x)] = m+n$

c) $\text{der } \left[\frac{P(x)}{Q(x)} \right] = m-n$

d) $\text{der } [P(x^k)] = k.m$

e) $\text{der} [P^k(x)] = k.m$

f) $\text{der} [P^k(x^t)] = k.m.t$

g) $\text{der} [P(Q(x))] = m.n$

h) $\text{der} [P(ax+b)] = m$

ÖRNEK:

der $[P(x)] = 3$ ve der $[Q(x)] = 2$ olmak üzere, der $[P^2(x) \cdot Q^4(x)]$ kaçtır?

ÖRNEK:

der $[P(x^2) \cdot Q(x)] = 10$, der $\left[\frac{x^2 \cdot P(x)}{Q(x)} \right] = 4$ olduğuna göre der $[P(x) + Q(x)]$ kaçtır?

3) Polinomlarda Bölme:

$P(x)$, $Q(x)$ ve $B(x)$ birer polinom ve $\deg [P(x)] \geq \deg [Q(x)] > \deg [K(x)]$ olmak üzere,

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline - & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

$P(x)$: Bölünen
 $Q(x)$: Bölen
 $B(x)$: Bölüm
 $K(x)$: Kalan

$$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x) \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$P(x) = 2x^4 - 4x + 5$ polinomunu $Q(x) = x^2 - x + 1$ polinomuna bölelim.

Polinomlarda Bölme Yapmadan Kalanı Bulma

1) Bir $P(x)$ polinomunun $(x-a)$ ile bölümünden elde edilen kalan:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline - & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

$$P(x) = \underbrace{(x-a) \cdot B(x)} + K(x)$$

Amaç 0 'lamak

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

$$P(a) = \text{Kalan}$$

$$P(x) \text{ 'in } x+2 \text{ ile bölümünden kalan } \xrightarrow[x=-2]{x+2=0} P(-2)$$

$$P(x) \text{ 'in } x-3 \text{ ile bölümünden kalan } \xrightarrow[x=3]{x-3=0} P(3)$$

$$P(x-1) \text{ 'in } x-1 \text{ ile bölümünden kalan } \xrightarrow[x=1]{x-1=0} P(0)$$

$$P(x+2) \text{ 'nin } x+1 \text{ ile bölümünden kalan } 3 \text{ ise } \xrightarrow[x=-1]{x+1=0} P(1) = 3$$

$$P(x-2) \text{ 'nin çarpanlarından biri } x+4 \text{ ise } \xrightarrow[x=-4]{x+4=0} P(-6) = 0$$

2) Bir $P(x)$ polinomunun $ax+b$ ile bölümünden elde edilen kalan:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax+b \\ - & B(x) \\ \hline & K(x) \end{array}$$

$$P(x) = (ax+b) \cdot B(x) + K(x)$$

Amaç 0 'lamak

$$ax+b = 0 \text{ ise } x = \frac{-b}{a}$$

$$P\left(\frac{-b}{a}\right) = \text{Kalan olur.}$$

$P(x)$ 'in $2x-1$ ile bölümünden kalan $\frac{2x-1=0}{x=\frac{1}{2}} \rightarrow P(\frac{1}{2})$

$P(x-2)$ 'nin $3x+1$ ile bölümünden kalan $\frac{3x+1=0}{x=-\frac{1}{3}} \rightarrow P(-\frac{7}{3})$

3) Bir $P(x)$ polinomunun x^n+a ile bölümünden elde edilen kalan:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x^n+a \\ - & B(x) \\ \hline & K(x) \end{array}$$

$$P(x) = \underbrace{(x^n+a) \cdot B(x)}_{\text{Amaç 0 'lamak}} + K(x)$$

$x^n+a = 0$ ise $x^n = -a$ (Polinomda x^n yerine $-a$ yazılarak kalan bulunur.)

ÖRNEK:

$P(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 2$ polinomunun $(x-2)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = 4x^2 - 8x + 3$ polinomunun $(2x+1)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = 2x^{13} + 4x^{15} + b$ polinomunun $(x-1)$ ile bölümünden kalan -2 olduğuna göre b kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = 2x^3 + 5x - 2$ olduğuna göre $P(x+1)$ polinomunun $(x+2)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x-2) = 3x^2 - mx + 2$ veriliyor. $P(3x+1)$ polinomunun $(x-1)$ ile bölümünden kalan -12 olduğuna göre m kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = mx^3 + nx^2 + x - 5$ veriliyor. $P(x)$ polinomunun $(x-1)$ ile bölümünden kalan 1, $(x+1)$ ile bölümünden kalan -5 olduğuna göre $m+n$ kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = 3x^3 - mx^2 + 2x - 5$ polinomu $(x-1)$ ile tam bölündüğüne göre $P(2)$ kaçtır?

ÖRNEK:

$\frac{P(x-1)}{Q(x+2)} = x^2 - 2x - 3$ veriliyor. $Q(x-1)$ 'in katsayılar toplamı 4 olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $(x+3)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = 3x^{17} - 81x^{14} + 6x - 15$ veriliyor. $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm $(x-3)$ ise kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$Q(x)$ polinomunun $(x+2)$ ile bölümünden kalan 3 'tür. $P(x)$ polinomunun $(x-1)$ ile bölümünden elde edilen bölüm $Q(x-2)$ ve kalan 8 ise $P(x-4)$ polinomunun $x-4$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x^2+1) = x^6 + 4x^4 - 3x^2 + 4$ olmak üzere; $P(2x+1)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ bir polinom olmak üzere;

$(x-1) \cdot P(x+1) = x^5 + kx - 1$ veriliyor. Buna göre $P(x-1)$ polinomunun $x-3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan 4, $x+1$ ile bölümünden kalan -6 olduğuna göre $P(x)$ 'in $(x-2) \cdot (x+1)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomunun $x-4$ ile bölümünden kalan -5 ve $x+2$ ile bölümünden kalan 9 'dur. Buna göre $P(x)$ polinomunun $x^2 - 2x - 8$ ile bölümünden kalan nedir?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomunun $x^2 - x - 6$ ile bölümünden kalan $2x+4$ olduğuna göre $x+2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümündeki bölüm $B(x)$, kalan 3 'tür. $B(x)$ polinomunun $(x+4)$ ile bölümündeki bölüm $R(x)$, kalan -2 'dir. Buna göre $P(x)$ polinomunun $(x-2) \cdot (x+4)$ ile bölümünden kalan nedir?

ÖRNEK:

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ polinomunun bir çarpanı $x^2 - 3x + 2$ olduğuna göre b kaçtır?

ÖRNEK:

3. dereceden bir $P(x)$ polinomu, $(x-1)$, $(x-2)$ ve $(x+2)$ ile bölündüğünde kalanlar eşit ve 2 'dir. $P(x)$ 'in sabit terimi 14 olduğuna göre $P(3)$ kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomunun $x^3 - 1$ ile bölümünden kalan $x^2 - 6x + 2$ 'dir. Buna göre $P(x)$ 'in $x^2 + x + 1$ ile bölümünden kalan nedir?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomunun $x^2 - x + 8$ ile bölümünden kalan $x-3$ ise $[P(x)]^2$ polinomunun $x^2 - x + 8$ ile bölümünden kalan nedir?

ÖRNEK:

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ polinomunun bir çarpanı $x^2 - 3x + 2$ olduğuna göre b kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = x^3 - x^2 + 2ax + b - 3$ polinomunun $x^2 + x - 3$ ile bölümünden kalan $3x-1$ ise $a-b$ kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = x^4 - 4x^2 - 8$ polinomunun $x^2 + 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = x^{12} - 2x^6 + 3x^5 - x^2 + 2$ polinomunun x^3-2 ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomu x^2-9 ile bölündüğünde bölüm $Q(x)$, kalan $2x+4$ 'tür. Buna göre $P(x)$ polinomunun $x+3$ ile bölümünden elde edilen bölüm polinomu nedir?

NOT: $P(x)$ polinomu $(x-a)^2$ ile tam bölünebiliyorsa hem $P(x)$ hem de $P(x)$ 'in 1. türevi $(x-a)$ ile bölünebilmelidir.

$$P(a) = 0 \text{ ve } P'(a) = 0 \text{ 'dır.}$$

Genel olarak $P(x)$ polinomunun $(x-a)^n$ ile bölünebilmesi için $P(x)$ polinomu ve $(n-1)$ tane ardışık türevi $(x-a)$ ile bölünebilmektedir.

ÖRNEK:

$P(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ polinomu $(x - 1)^2$ ile tam bölünebiliyorsa a.b çarpımı kaçtır?

ÖRNEK:

$x^4 - ax^2 + 2x - b = 0$ denkleminin $x = -1$ 'de 2 katlı kökü varsa $a-b$ farkı kaçtır?

ÖRNEK:

$P(x) = 2x^{93} - 3x^{41} + 4x - 3$ polinomunun $x^2 + x + 1$ ile bölümünden kalan nedir?