dersdeo

öğrenmenin en kolay yolu o!

MAT 2

TÜREV

Türev Alma Kuralları

Bir Noktada Türev

$f : [a, b] \longrightarrow R$, $y = f(x)$ fonksiyonu ve $x_0 \in (a, b)$ verildiğinde,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

değeri varsa, bu değere $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki birinci türevi denir ve

$f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ gibi sembollerle gösterilir.

Bu limit gösteriminde, $x = x_0 + h$ alındığında; $x \longrightarrow x_0$ için $h \longrightarrow 0$ olur. O halde f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi;

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

biçiminde gösterilir.

Eğer, f(x) fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığın her noktasında türevi varsa, f(x) fonksiyonuna bu aralıkta türevlenebilir fonksiyon denir.

Türev Alma Kuralları

u ve v, x e bağlı fonksiyonlar ve c ∈ R olmak üzere;

1. $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0$

2. $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

3. $f(x) = cx \Longrightarrow f'(x) = c$

4. $f(x) = c.\ x^n \Longrightarrow f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$

5. $f(x) = c.\ u^n \Longrightarrow f'(x) = c \cdot n \cdot u^{n-1} \cdot u'_x$

6. $f(x) = u \pm v \Longrightarrow f'(x) = u'_x \pm v'_x$

7. $f(x) = u \cdot v \Longrightarrow f'(x) = u'_x \cdot v + v'_x \cdot u$

8. $f(x) = u \cdot v \cdot t \Longrightarrow f'(x) = u'_x \cdot v \cdot t + v'_x \cdot u \cdot t + t'_x \cdot u \cdot v$

9. $f(x) = \frac{u}{v} \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'_x \cdot v - v'_x \cdot u}{v^2}$

10. $f(x) = \sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{n}{m} \cdot u^{\frac{n}{m}-1} \cdot u'_x$

Pratik

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ise, $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ dir.

Ardışık Türevler

$y = f(x)$ fonksiyonunda;

1. basamaktan türev : $y^{I} = \frac{dy}{dx} = f^{I}(x)$

2. basamaktan türev : $y^{II} = \frac{d^2y}{dx^2} = f^{II}(x)$

3. basamaktan türev : $y^{III} = \frac{d^3y}{dx^3} = f^{III}(x)$

4. basamaktan türev : $y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = f^{IV}(x)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

n. basamaktan türev : $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ tir.

ÖRNEK

$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ $f^{l}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $f'(-1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 4x + 3$ $f^{II}(1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

$g(x) = x^2 + 2x - 7$

ise $(f + g)^{'} (x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = (2x^3 - 1) \cdot (x^2 + 1)$ ise $f^1(0)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = (x^4 - 1) \cdot (x^4 + 1)$ $f'(-1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ise $f'(-1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{x + a}{x + 1}$ $f'(2) = \frac{4}{9}$ ise a değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{3x + 5}{2x - 4}$ ise $\left(f^{-1}(x)\right)'$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$3 + 2f(x) = x \cdot f(x) - 5x$ ise $f'(-3)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{x} + 2x$ ise $f^{I}(4)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ ise $f'(1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x + 7$ $f^{I}(-1) = -19$ ve $f^{II}(-2) = 44$ ise $a + b$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 7$ ise $f^{(34)}(-1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 + 1}$ ve $f'(0) = 4$ ise $g'(0)$ değerini bulunuz.

Bileşke Fonksiyonunun Türevi

f, x_0 noktasında türevlenebilen; g de $f(x_0)$ 'da türevlenebilen birer fonksiyon ise, h = gof fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilir ve,

$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ olur.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = 4x - 7$ ise $(f \circ g)'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$g(3) = 4$, $f'(4) = 5$, $g'(3) = 6$ ise $(f \circ g)'(3)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = ax + 4$, $g(x) = x^2 + x$, $(f \circ g)'(1) = 12$ ise a değerini bulunuz.

ÖRNEK

$g(x) = h(x \cdot f(x))$ olsun.

$f(1) = 2$, $f'(1) = 3$ ve $h'(2) = 4$ ise $g'(1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = (3x - 2)^4$ ise $f'\left[\frac{1}{3}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = (x^2 - 1)^2 \cdot (3x + 1)$ ise $f^{I}(2)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$g(x) = \dfrac{1}{(2x^2 + 1)^2}$ ise $g'(x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = (3x + 1) \cdot \sqrt{2x - 1}$ ise $f'(13)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ $f'(0)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x + 1) = x^2 - 3x + 1$ ise $f'(2)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(5x - 3) = 4x^2 - 3x - 1$ ise $f^{1}(7)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(2x - 5) = f(4x) + 2x^2 - 1$ ise $f'(-10)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(3x^2 + 5) = g(x^2 - 3)$ ve $f'(8) = 1$ ise $g'(-2)$ değerini bulunuz.

Ters Fonksiyonların Türevi

$f : A \longrightarrow B$, $f : x \longrightarrow y = f(x)$ fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olsun.

$$(f^{-1})^{I}(y) = \frac{1}{f^{I}(x)} = \frac{1}{f^{I}(f^{-1}(y))} \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 1$ ise $(f^{-1})'(7)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + x$ ise $(f^{-1})'(2)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f : [3, \infty] \rightarrow [-8, \infty]$

$f(x) = x^2 - 6x + 1$ ise $(f^{-1})'(-4)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 3x^2 + 5x + 8$ ise

$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ ise

$\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{1 + x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ise

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(2x) = (x^2 - x + 1)^3$ ise

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{1}{x}$ ise

$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = (2x + 3)^n$ ise $f^{(n)}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2009}$ ise $f^{(2009)}(x)$ değerini bulunuz.

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

1. $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$

2. $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$

3. $f(x) = \tan x \Longrightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

4. $f(x) = \cot x \Longrightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$

5. $f(x) = \sin[u(x)] \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot \cos[u(x)]$

6. $f(x) = \cos[u(x)] \Longrightarrow f'(x) = -u'(x) \cdot \sin[u(x)]$

7. $f(x) = \tan[u(x)] \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot [1 + \tan^2 u(x)]$

$$= \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}$$

$$= u'(x) \cdot \sec^2[u(x)]$$

8. $f(x) = \cot[u(x)] \Longrightarrow f'(x) = -u'(x) \cdot [1 + \cot^2 u(x)]$

$$= -\frac{u'(x)}{\sin^2[u(x)]}$$

$$= -u'(x) \cdot \operatorname{cosec}^2[u(x)]$$

ÖRNEK

$f(x) = \sin x - \cos x$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin x \cdot \cos x$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x \cdot \tan x$ ise $f'\left[\frac{\pi}{4}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 \cdot \cot x$ ise $f'\left[\frac{\pi}{2}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ ise $f'(0)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin(3x - 1)$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \tan(2x + 5)$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin(3x)$ ise

$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin\sqrt{x}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin^2 x$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \cos^3 x$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \tan^2(2x + 1)$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ ise

$\frac{f'(x)}{\sin 4x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(\sin x) = \tan x$ ve $f'\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin(\cos x)$ ise $f'\left[\frac{\pi}{2}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin x$ ise $f^{(43)}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin^2(\cos x)$ ise $f^{l}(x)$ i bulunuz.

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

u, x'e bağlı bir fonksiyon olmak üzere;

1) $f(x) = \arcsin u$ ise $f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

2) $f(x) = \arccos u$ ise $f'(x) = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

3) $f(x) = \arctan u$ ise $f'(x) = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

4) $f(x) = \operatorname{arccot} u$ ise $f'(x) = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

ÖRNEK

$f(x) = \arcsin 2x$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \arccos(3x + 1)$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \arctan(x^2 + 1)$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \text{arccot}(x^3 - 4)$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \arcsin^2 x$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \cos^2(\arcsin x)$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \tan(\arctan\sqrt{x})$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \arcsin 2x$ ise $(f^{-1})'\left[\frac{\pi}{6}\right]$ değerini bulunuz.

Logaritmik ve Üstel Fonksiyonların Türevi

u ve v, x e bağlı fonksiyonlar olmak üzere,

1. $f(x) = \log_a x$ ise $f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x.\ln a}$

2. $f(x) = \log_a u$ ise $f'(x) = \frac{u'_x}{u}\log_a e = \frac{u'_x}{u.\ln a}$

3. $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \ln u \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'_x}{u}$

5. $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

6. $f(x) = a^u \Longrightarrow f'(x) = u'_x \cdot a^u \cdot \ln a$

7. $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

8. $f(x) = e^u \Longrightarrow f'(x) = u' \cdot e^u$

ÖRNEK

$f(x) = 3^{x+1}$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 5^{2x-9}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 4^{\sin x}$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 2^{\tan x - x}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = e^{x-5}$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = e^{\cot x}$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \cos(e^{3x-1})$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 \cdot 3^x$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 . \sin^x$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \arcsin e^x$ ise $f^{-1}\left[\ln \frac{1}{2}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$ ise $f^1(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = e^{3x}$ ise $f^{(25)}(0)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(e^x) = x^2 + 3x + 1$ ise $f^1(e)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 2^{x+1}$ ise $(f^{-1})'(8)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln x - x + 3$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln(3x - 1)$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln(\sin x)$ ise $f'\left[\frac{\pi}{6}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln\left[\frac{x^2 + 3}{x - 2}\right]$ ise $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \sin x \cdot \ln x$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln^3 x$ ise $f^{I}(e)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln(\ln x)$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln(\sqrt{\sin 2x})$ ise $f'\left[\frac{\pi}{8}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln(\arcsin x)$ ise $f'\left[\frac{1}{2}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(\ln x) = \sin x$ ise $f^{I}(1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \log_3(x^2 + 4x + 1)$ ise $f'(1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \log_2(\tan x)$ ise $f'\left[\frac{\pi}{4}\right]$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \ln(\log x)$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \log_3 x$ ise $(f^{-1})'(2)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\sin 2x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(\tan x))$ ifadesini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^x$ ise $f^{I}(e)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^{\ln x}$ ise $f^{I}(e)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ ise $f'\left[\frac{\pi}{2}\right]$ değerini bulunuz.

Kapalı Fonksiyonların Türevi

F(x, y) = 0 bağıntısından, y = f(x) gibi en az bir f fonksiyonu elde edilebiliyorsa, f fonksiyonu F(x, y) = 0 bağıntısı ile kapalı olarak verilmiştir denir.

Eğer F(x, y) = 0 bağıntısı, y = f(x) biçiminde yazılabiliyorsa; $y' = \frac{dy}{dx}$ değeri, önceki yöntemlere göre bulunur.

Ancak, çoğu zaman, F(x, y) = 0 bağıntısını y = f(x) biçiminde yazmak mümkün olmayabilir.

Bu durumda, F(x, y) = 0 bağıntısının her teriminin x'e göre türevi alınarak $\frac{dy}{dx}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 + y^2 - 3x + y = 0$ ise $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

ÖRNEK

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2y + 3x - 5y + 4 = 0$ ise $f^{I}(0, 1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 0$ ise $f^{I}(x)$ i bulunuz.

ÖRNEK

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ ise $f'(9, k)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\sin(xy) + xy = 0$ ise $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

ÖRNEK

$xy = \ln(xy)$ ise $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

Parametrik Fonksiyonların Türevi

$A \subset R$ için $f : A \longrightarrow R$ fonksiyonu, $y = f(x)$ kuralı ile belirtildiği gibi, t ortak değişkenine bağlı olarak, $y = f(t)$ ve $x = g(t)$ kuralıyla da belirtilebilir. Buradaki t'ye parametre, $y = f(t)$ ve $x = g(t)$ ifadelerine de parametrik fonksiyon denir.

f ve g fonksiyonları, t değişkenine göre türevli fonksiyonlar ise; y'nin x değişkenine göre türevi,

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$ olur.

Parametrik fonksiyonların ikinci türevi ise,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} = \left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right] = \frac{d}{dx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)$$

$\frac{y'_t}{x'_t} = z$ olsun. O halde $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{z'_t}{x'_t}$ dir.

ÖRNEK

$x = t^3 + 3t$
$y = t^2 + 5$ ise $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

ÖRNEK

$x = 2\sqrt{t}$
$y = t^2 - t$ ise $x = 2$ için $\frac{dy}{dx}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$x = e^{-t}$
$y = e^{3t}$ ise $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

ÖRNEK

$y = \sin\alpha$
$y = \cos\alpha$ ise $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

ÖRNEK

$x = 2^t$

$y = \ln(2t)$

ise $x = 2$ için $\frac{dy}{dx}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$x = t^2 - 1$

$u = t^2 + t + 5$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ i bulunuz.

Zincir Kuralı

$$\left.\begin{array}{l} y = f(t) \\ t = g(u) \\ u = h(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK

$y = t^2 + 1$

$t = 2x + 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

ÖRNEK

$y = \ln x$
$x = e^t$
$t = n^2 + 1$

ise $\frac{dy}{dn}$ i bulunuz.

ÖRNEK

$x = y^2 + 4$

$y = \frac{1}{u}$ ise $t = 1$ için $\frac{dx}{dt}$ değerini bulunuz.

$u = t^3$

Türev – Süreklilik İlişkisi

- $f : [a,b] \longrightarrow R$ ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

  Eğer, f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında türevli ise aynı noktada süreklidir.

- Ancak, f fonksiyonu x = x noktasında sürekli ise aynı noktada türevli olmayabilir.

- Bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktada türevi yoktur.

Soldan ve Sağdan Türev

$f : [a,b] \longrightarrow R$ ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

değeri varsa, bu değere f fonksiyonunun x_0 noktasında soldan türevi denir ve $f'(x_0^-)$ biçiminde gösterilir.

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

değeri varsa, bu değere de f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan türevi denir ve $f'(x_0^+)$ biçiminde gösterilir.

Sonuç:

x_0 noktasında sürekli bir f fonksiyonu için;

- f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında, soldan türevi sağdan türevine eşit ise, f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında türevi vardır.
- f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında, soldan türevi sağdan türevine eşit değilse, f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında türevi yoktur.
- f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında türevi varsa bu noktada sağdan türevi soldan türevine eşittir.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 6x + 2 & x \leq -1 \\ 4x + k & x > -1 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = -1$'de türevi varsa $a + k$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -1 \\ 3 & x = -1 \\ 2bx - c & x > -1 \end{cases}$$

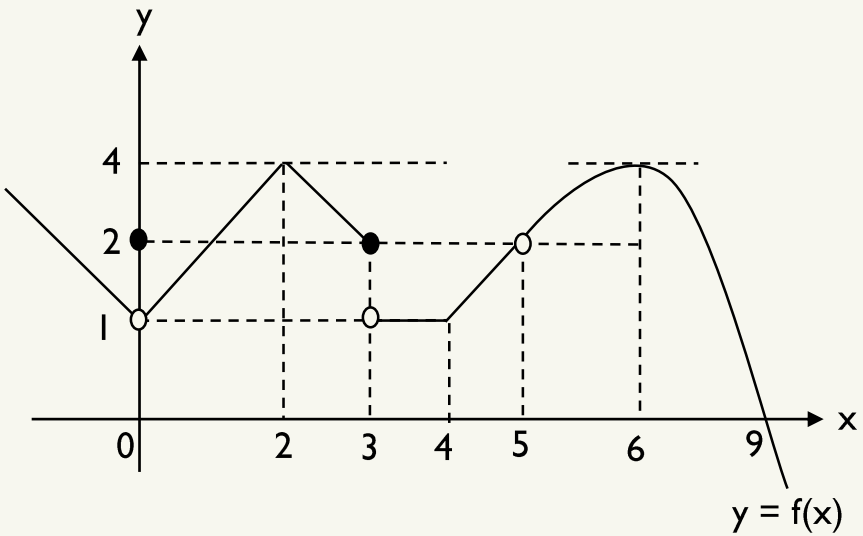
fonksiyonu her x için türevli ise a + b + c değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

ise fonksiyonun türevli olduğu aralığı bulunuz.

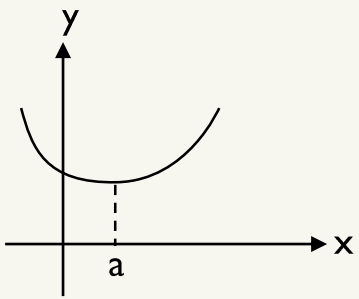
ÖRNEK

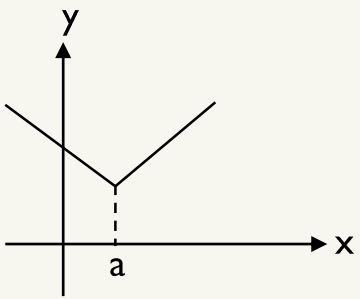


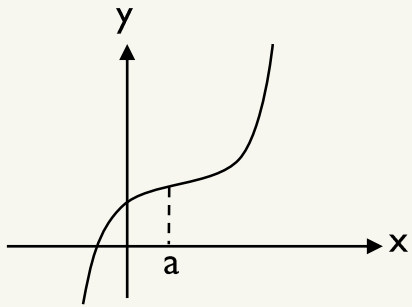
Yanda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun apsisi verilen noktalarındaki türev-süreklilik ilişkisini inceleyiniz.

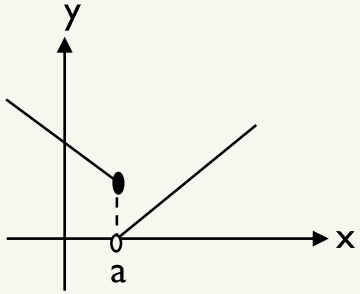
ÖRNEK

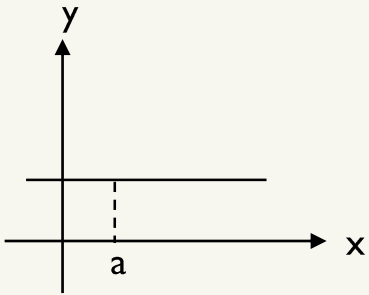
Aşağıda grafiği verilen fonksiyonlardan hangilerinin x = a apsisli noktada türevi vardır?

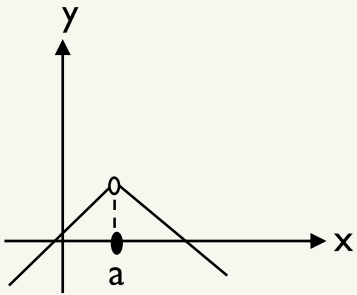


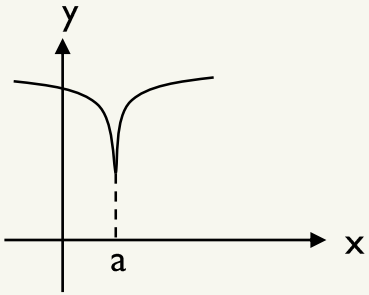


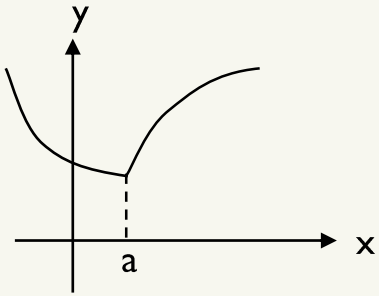












Özel Tanımlı Fonksiyonların Türevi

Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi

$f : R \longrightarrow R$ ve $f(x) = |g(x)|$ ise, $f(x)$'in $x = x_0$ noktasındaki türevi,

$$f'(x_0) = \begin{cases} g'(x_0) \cdot \dfrac{|g(x_0)|}{g(x_0)}, & g(x_0) \neq 0 \text{ ise,} \\ g(x_0) = 0 \text{ ise, bazı özel durumların dışında türev yoktur.} \end{cases}$$

ÖRNEK

$f(x) = 1x + 31 + 13 - 2x1$ olduğuna göre, $f^{l}(1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 1x^3 - 5x - 21$ olduğuna göre $f^{l}(1)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = |x^2 - 9|$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f'(3)$ değerini bulunuz.

b) $f'(-1)$ değerini bulunuz.

c) $f'(4)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = |x - 2| + |x^2 - 6x + 9| + \dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$ fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 3 \\ 6x - 3 & x > 3 \end{cases}$$ ise $f'(3)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 0 \\ x^3 - 2 & x > 0 \end{cases}$$ ise $f'(-2)$ değerini bulunuz.

L'hospital Teoremi

f ve g fonksiyonları [c, d] 'de sürekli ve (c, d) 'de türevli iki fonksiyon olsun. a ∈ (c ,d) olmak üzere,

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mevcutsa,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ olur.

L'Hospital Kuralı, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinde de kullanılır.

Eğer $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0} \left(\text{veya } \frac{\infty}{\infty} \right)$ belirsizlik durumu devam ederse, belirsizlik durumu kalkıncaya kadar L'Hospital Kuralı art arda uygulanabilir.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^8 - 1}{x - 1}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 0} \dfrac{6^x - 2^x}{x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{a \to b} \dfrac{a^6 - b^6}{a^3 - b^3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\ln x}$ limitinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

2010 LYS

ÖRNEK

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{\tan x - \sqrt{3}}$$ limitinin değeri kaçtır?

A) $-2\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

ÖYS 1988

ÖRNEK

$\lim_{x \to a} \dfrac{\cos 2x - \cos 2a}{\sin x - \sin a}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x + \sin 5x}{4x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x + \arcsin x}{\sin 2x}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

LYS 2011

ÖRNEK

$f : R \longrightarrow R$ her noktada türevli bir fonksiyon ve $f'(1) = 3$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + 2h) - f(1 - 3h)}{h}$$ kaçtır?

A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

ÖSS 2006

ÖRNEK

Gerçel sayılar kümesi üzerinde, tanımlı ve türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$f(x + y) = f(x) + f(y) + x \cdot y$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 3$ olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÖSS 2007

ÖRNEK

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 2\sin x - 1}{\cos 2x + \sin 2x - 1}$$ değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

ÖYS 1993

ÖRNEK

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \cos(\pi x) + 1}{x - 1}$$ değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

ÖYS 1989

ÖRNEK

$\lim_{x \to \pi} \frac{\tan x}{x - \pi}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 3}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt[3]{x}}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 3} \dfrac{\ln(x^2 - 8)}{\tan(2x - 6)}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x)$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 0} x^{\sin x}$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{121}}{e^x}$ değerini bulunuz.

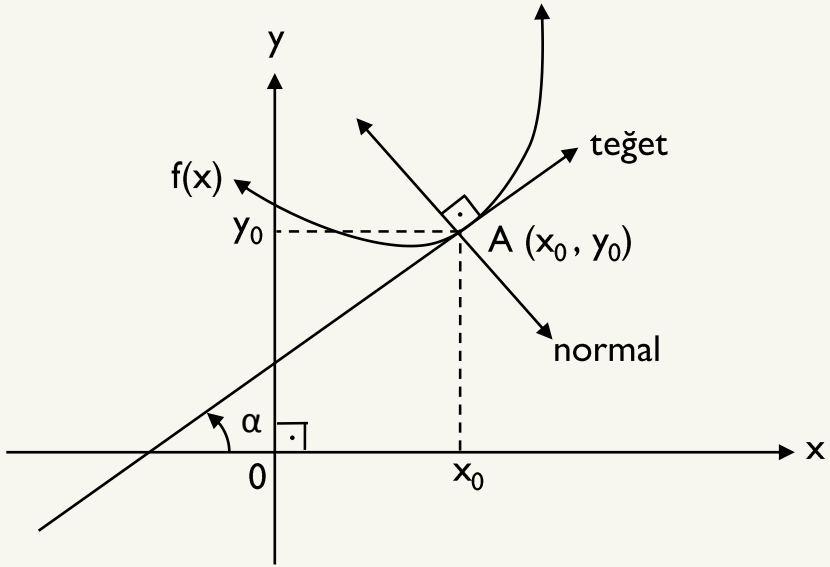
ÖRNEK

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos\sqrt{x}}{x}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\sqrt{2}$

ÖSS 2007

Teğet ve Normal Denklemleri



$m_T = \tan\alpha$

Denklemi $y = f(x)$ olan eğriye, apsisi x_0 olan üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi $m = f'(x_0)$'dır.

Teğet ve normal birbirlerine dik olduğundan eğimler çarpımı -1'dir.

$$m_T \cdot m_N = -1 \longrightarrow m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Teğetin denklemi; $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Normalin denklemi; $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

ÖRNEK

$f(x) = (2x^2 + 4x - 1)^3$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \cos^2 5x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \arctan(x^2 + 2)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki normalinin eğimini bulunuz.

ÖRNEK

$y = 3t^2 + 5t - 1$
$x = 6t + 5$

fonksiyonunun $x = 11$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

ÖRNEK

$x^3 + y^2 - xy - 3 = 0$ fonksiyonunun A (1, 2) noktasındaki normalinin eğimini bulunuz.

ÖRNEK

$t < 0$ olmak üzere;

$x = t^2 + 1$
$y = 3t + 2$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

ÖRNEK

f(x) = ln (lnx) fonksiyonunun x = e noktasındaki normalinin y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + ax^2 – bx + 3$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki teğeti $y = 5x + 5$ ise $a + b$ değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ fonksiyonunun $y = \frac{x}{4} + 5$ doğrusuna dik teğetinin değme noktasını bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 7x + 1$ fonksiyonunun $y = 5x + 3$ doğrusuna en yakın noktasını bulunuz.

ÖRNEK

$y = x^3$ fonksiyonuna A (1, 1) noktasında çizilen teğet, eğriyi başka bir B noktasında kesmektedir. Buna göre B noktasının koordinatlarını bulunuz.

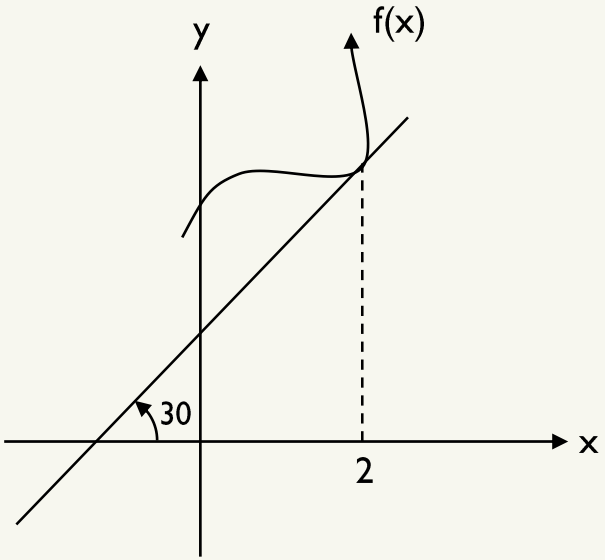
ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ fonksiyonuna $x = a$ apsisli noktasından çizilen teğeti x ekseniyle pozitif yönde 135°'lik açı yapıyorsa a'yı bulunuz.

ÖRNEK

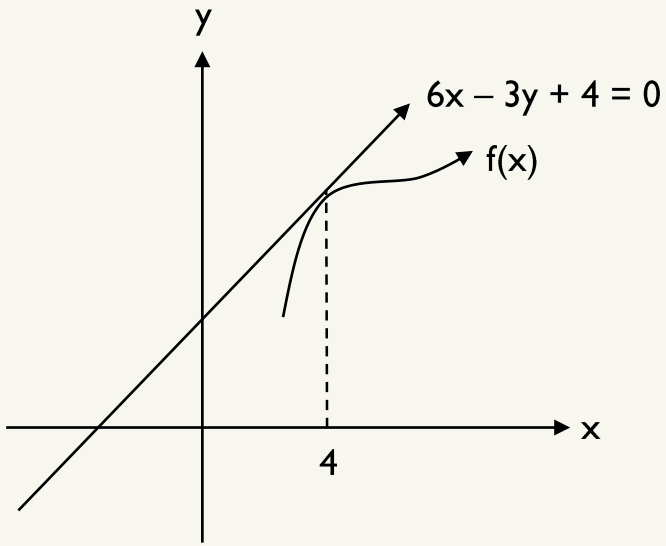
$f(x) = x^2 + x$ eğrisine A (0, – 1) noktasından çizilen teğetlerin eğimleri çarpımını bulunuz.

ÖRNEK



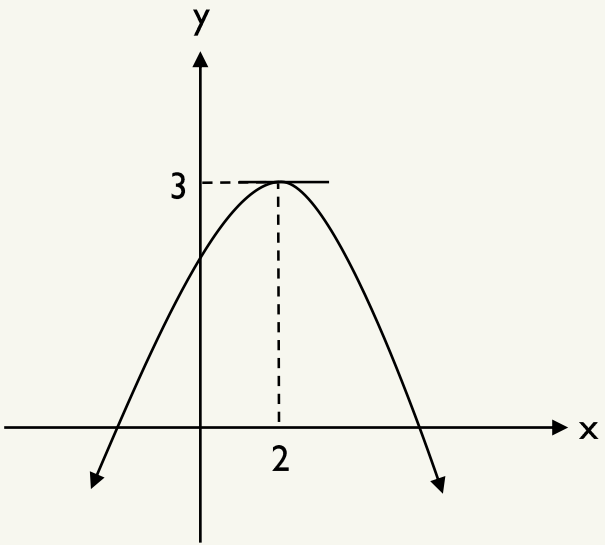
Yandaki f(x) grafiğine göre $f^{l}(2)$'yi bulunuz.

ÖRNEK



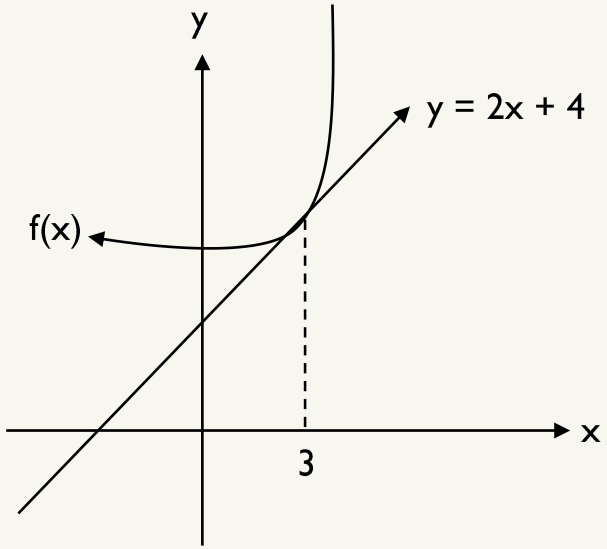
Yandaki f(x) grafiğine göre $f^{l}(4)$'ü bulunuz.

ÖRNEK



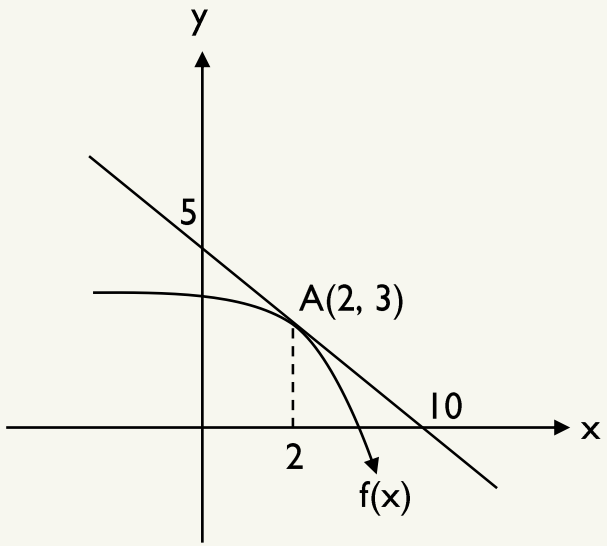
$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ise g(x) fonksiyonunun x = 2 noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

ÖRNEK



$g(2x) = x^2$. f(x) ise $g^{I}(6)$'yı bulunuz.

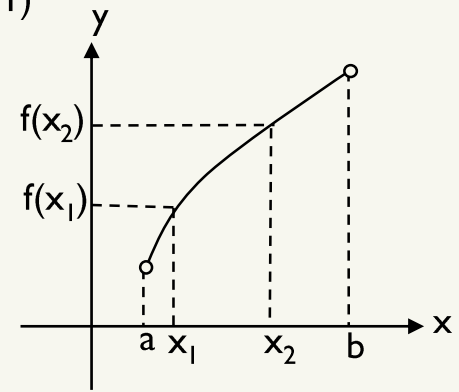
ÖRNEK

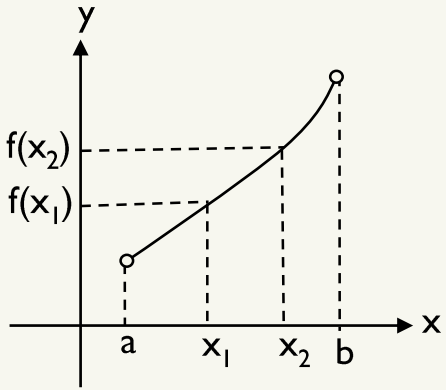


$g(2x + 1) = f^3(x)$ olduğuna göre $g^1(5)$'i bulunuz.

Artan – Azalan Fonksiyonlar

I)

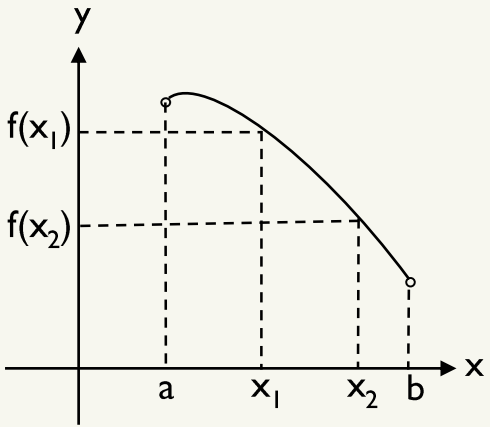


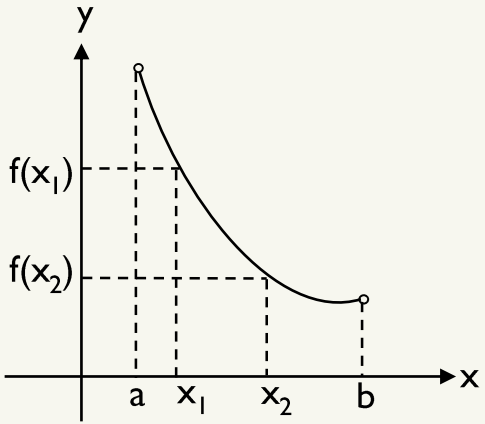


f: (a,b) ⟶ R olmak üzere

$\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$ için $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu (a, b) 'de artandır.

2)

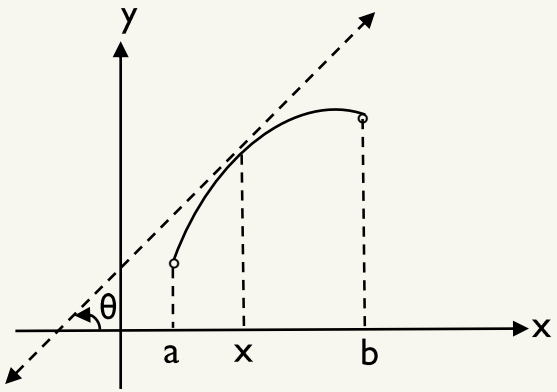


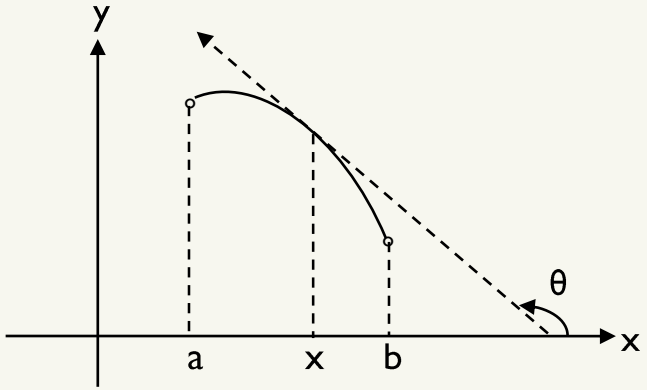


f: (a,b) $\longrightarrow$ R olmak üzere,

$\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$ için $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu (a, b) 'de azalandır.

3)



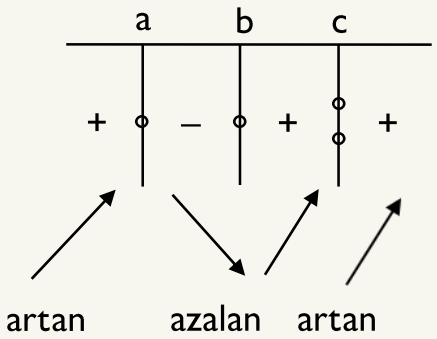


f fonksiyonu (a,b) aralığında artan ise bu aralığın her noktasındaki teğetinin eğimi pozitiftir. (θ dar açı)
Azalan ise teğetin eğimi negatiftir. (θ geniş açıdır.)

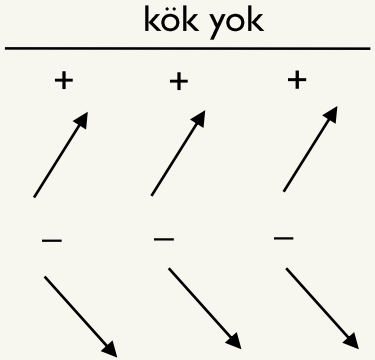
4) $f: (a,b) \longrightarrow R$, $y = f(x)$ fonksiyonu türevli olsun. $\forall x \in (a,b)$ için,

- $f'(x) > 0 \longleftrightarrow$ $y = f(x)$ artan fonksiyondur.
- $f'(x) < 0 \longleftrightarrow$ $y = f(x)$ azalan fonksiyondur.
- $f'(x) = 0 \longleftrightarrow$ $y = f(x)$ sabit fonksiyondur.

5) $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri a, b ve c olsun.



veya



ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 6x + 12$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ fonksiyonunun artan olduğu aralığı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = e^x .x^2$ fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulunuz.

ÖRNEK

f(x) = lnx – x fonksiyonunun artan olduğu aralığı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{ax - 2}{x - 1}$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta daima artan ise, a'nın en büyük tam sayı değerini bulunuz.

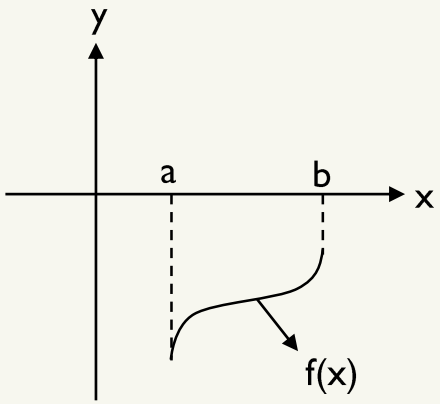
ÖRNEK

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3mx + 4$ fonksiyonu daima azalan ise, m'nin en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = -x^3 - ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun artan olduğu aralık $(-1,2)$ olduğuna göre $a + b + c$ değerini bulunuz.

ÖRNEK



Yandaki grafiğe göre aşağıdakilerden kaç tanesi <u>daima</u> artandır?

a) $\frac{f(x)}{x^2}$

b) $(f(x))^3$

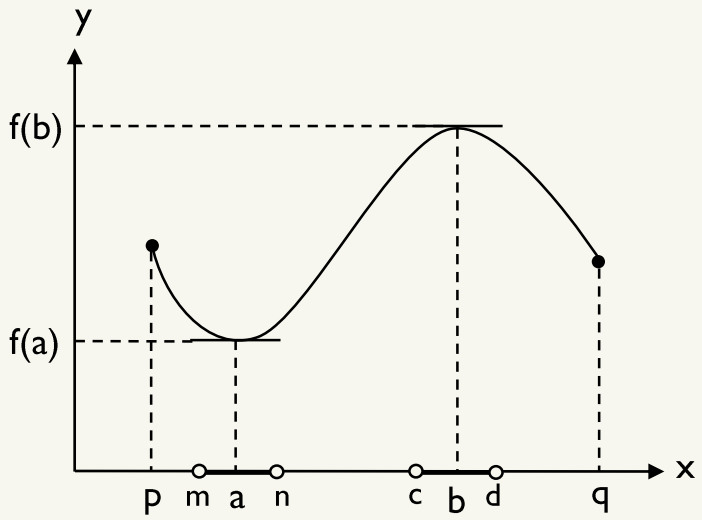
c) $x^3 . f(x) + 2x$

Yerel Ekstremum Noktalar

$f: A \longrightarrow R, \quad A \subset R, \quad a \in A$ ve $b \in A$ olsun.

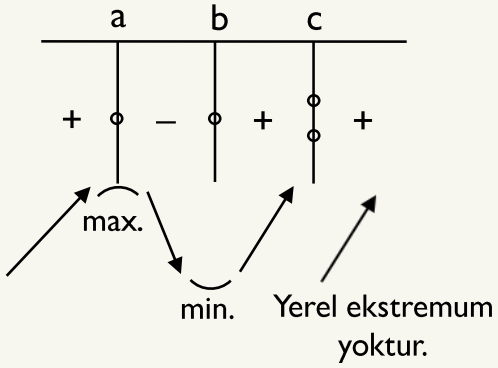
- $a \in (m,n)$ ve $\forall x \in (m,n)$ için $f(a) \leq f(x)$ ise, f fonksiyonu a noktasında bir yerel minimuma sahiptir.

- $b \in (c,d)$ ve $\forall x \in (c,d)$ için $f(b) \geq f(x)$ ise, f fonksiyonu b noktasında bir yerel maksimuma sahiptir.

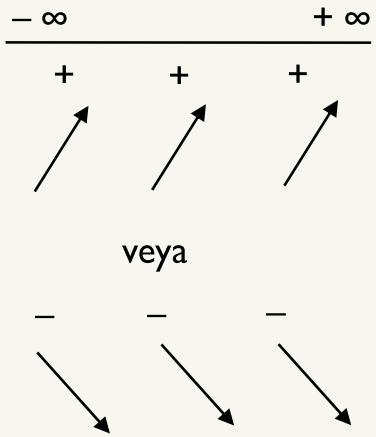

y
f(b)
f(a)
x
p
m
a
n
c
b
d
q

- y = f(x) fonksiyonunun yerel maksimum değerlerinden en büyüğüne bu fonksiyonun mutlak maksimum değeri, yerel minimum değerlerinden en küçüğüne de bu fonksiyonun mutlak minimumu denir.

- $f^{l}(x) = 0$ denkleminin kökleri a, b ve c olsun.



Eğer kök yoksa;



Ekstremum nokta yok.

- f(x) fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi, x = a
- f(x) fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi, x = b
- f(x) fonksiyonunun yerel maksimum değeri, f(a)
- f(x) fonksiyonunun yerel minimum değeri, f(b)
- f(x) fonksiyonunun yerel maksimum noktası, (a, f(a))
- f(x) fonksiyonunun yerel minimum noktası, (b, f(b))

NOT:

A (m, n) noktası f(x) fonksiyonunun yerel ekstremum noktası ise, $f(m) = n$ ve $f^{I}(m) = 0$ olmalıdır.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{1}{3} x^3 - x^2 - 15x + 6$ fonksiyonunun,

a) Yerel minimum noktasının apsisini bulunuz.

b) Yerel minimum noktasının ordinatını bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 2a$ fonksiyonunun yerel minimum değeri 8 ise, a'yı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 6x^2 + a$ fonksiyonunun maksimum değerinin minimum değerine oranı $\frac{1}{9}$ ise, a'yı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + ax^2 + b$ fonksiyonunun $(-2,3)$ noktasında bir maksimumu varsa, minimum noktasını bulunuz.

ÖRNEK

f(x) = x. lnx fonksiyonunun yerel minimum noktasının koordinatları toplamını bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2ax - 1}$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktada ekstremumu varsa, a'yı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^4 + ax^2 + 3x - 5$ olmak üzere; $f'(x)$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ apsisli noktada ekstremum noktası varsa, a'yı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisler toplamı $\frac{4}{3}$ ise, a'yı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ fonksiyonunun ekstremum noktası yoksa, a'nın tanım aralığını bulunuz.

ÖRNEK

f: $[-2, 1] \longrightarrow R$ olmak üzere;

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin toplamını bulunuz.

Maksimum – Minimum Problemleri

Maksimum ve minimum problemlerinde bir çokluğun alabileceği en büyük (mutlak maksimum) değer ya da en küçük (mutlak minimum) değer bulunmak istenir. Bu tür problemleri çözmek için;

- Maksimum ya da minimum olması istenen değer, önce tek değişkene bağlı bir fonksiyon olarak yazılır.

- Yerel ekstremum değerlerini bulmak için, yazılan fonksiyonun türevinden yararlanılır.

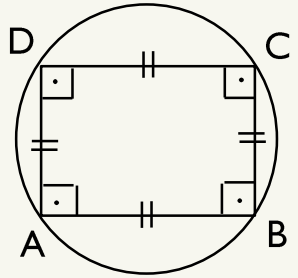
NOT:

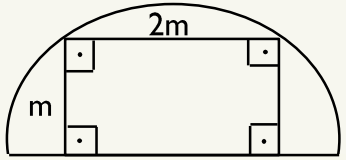
1) Toplamları sabit iki sayının çarpımının minimum olması için sayılar eşit olmalıdır.

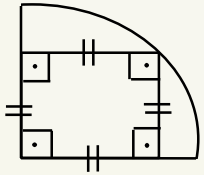
2) Çarpımları sabit iki sayının toplamının minimum olması için sayılar eşit olmalıdır.

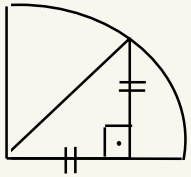
3) Çevresi sabit olan çokgenler içinde alanı maksimum olan, düzgün çokgendir.

4) Bir daire içine çizilen dikdörtgenlerden alanı maksimum olan, karedir.

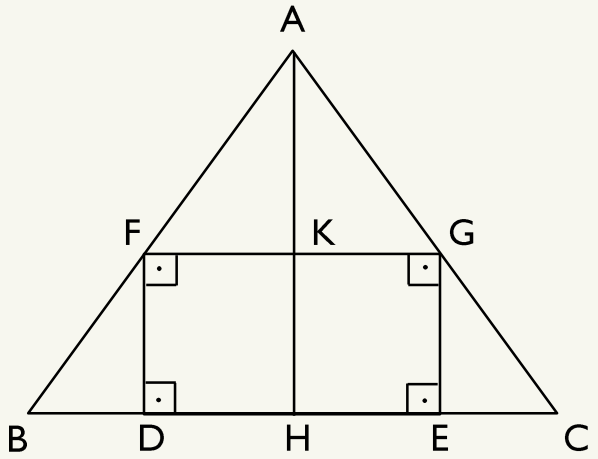








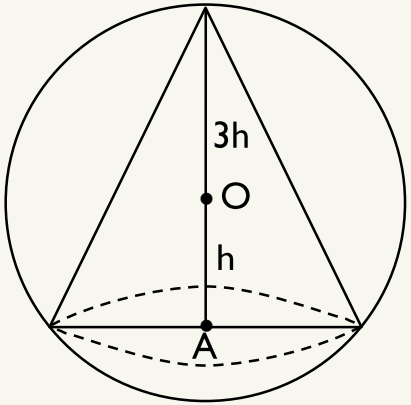
5) Bir üçgen içine çizilen dikdörtgenlerden alanı maksimum olan, üçgenin alanının yarısıdır.



$$|DE| = \frac{|BC|}{2}$$

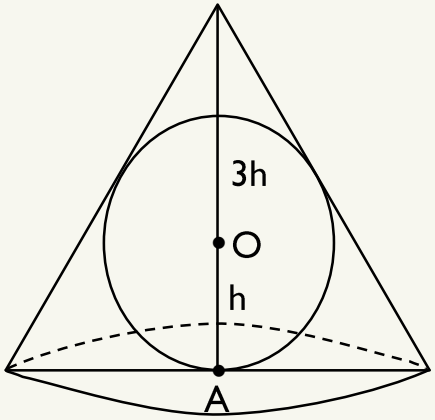
$$|FD| = \frac{|AH|}{2}$$

6)



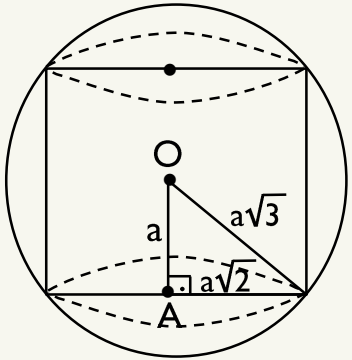
Kürenin içine çizilebilecek en büyük hacimli koni

7)



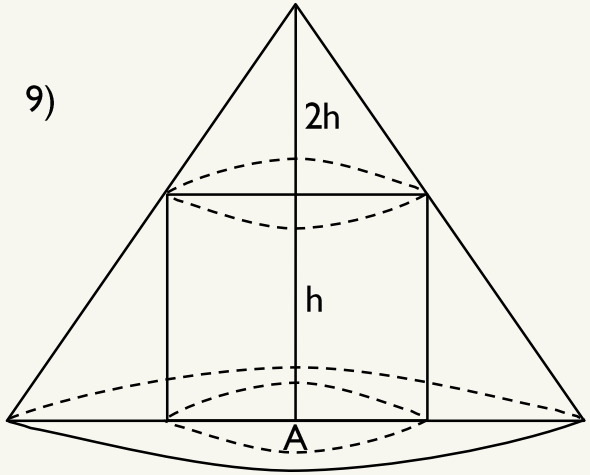
Koninin içine çizilebilecek en büyük hacimli küre

8)



Kürenin içine çizilebilecek en büyük hacimli dik silindir

9)



Koninin içine çizilebilecek en büyük hacimli dik silindir

ÖRNEK

x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere; $x + y = 16$ ise,

a) x. y çarpımının en büyük değerini bulunuz.

b) $x. y^3$ çarpımının en büyük değerini alması için y'nin kaç olması gerektiğini bulunuz.

NOT:

Çarpımın en büyük olması, x ve y değerlerinin üsleriyle orantılı olmasıdır.

ÖRNEK

Çevresi 30 cm olan bir dikdörtgenin alanının en büyük değerini bulunuz.

ÖRNEK

Bir kenarı duvar olan dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın üç kenarına bir sıra tel çekilecektir.
Kullanılan telin uzunluğu 160 m olduğuna göre, tarlanın alanının en fazla kaç m^2 olduğunu bulunuz.

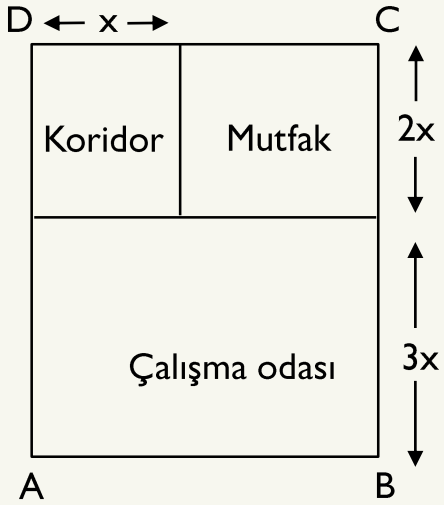
ÖRNEK

Yarıçapı 8 cm olan çember içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÖRNEK

Yarıçapı 4 cm olan yarım daire içine çizilebilecek maksimum alanlı yamuğun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÖRNEK



Koridor, mutfak ve çalışma odasından oluşan bir iş yerinin yanda verilen modeli ABCD dikdörtgenidir ve bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 72 metredir. Bu iş yerindeki mutfağın en geniş alanlı olması için x kaç metre olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

LYS 2010

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 7x + 14$ parabolü üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 3

ÖYS 1996

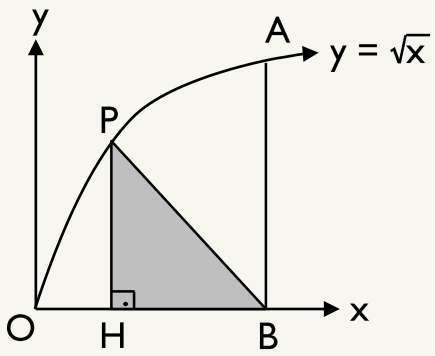
ÖRNEK

(1, 2) noktasından geçen negatif eğimli bir d doğrusu ile koordinat eksenleri arasında kalan üçgensel bölgenin alanı en az kaç birim karedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

LYS 2011

ÖRNEK



Denklemi $y = \sqrt{x}$ olan şekildeki parabolün A ve P noktalarının x ekseni üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla B (36, 0) ve H (x, 0) 'dır. HBP üçgeninin alanı, x'in hangi değeri için en büyüktür?

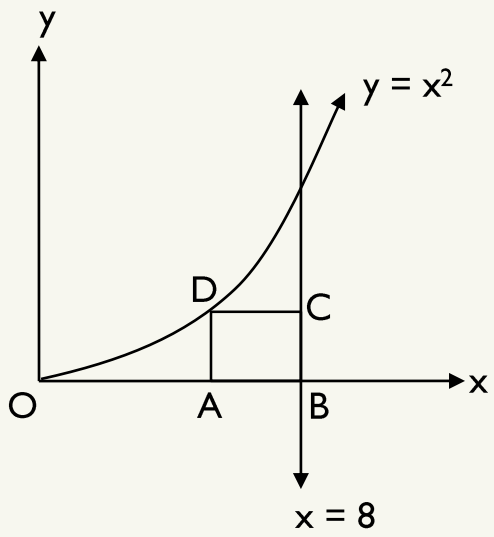
A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 4

ÖYS 1993

ÖRNEK

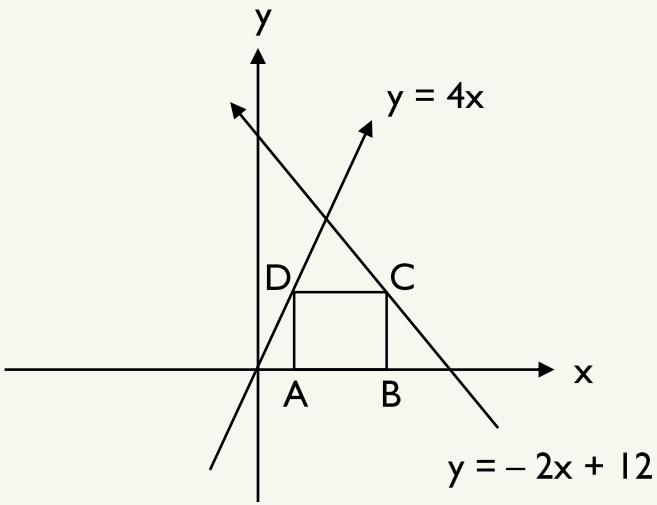
$f(x) = x^2$ parabolünün K (3, 0) noktasına en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÖRNEK



ABCD dikdörtgeninin alanı maksimum kaç br^2 'dir?

ÖRNEK



ABCD dikdörtgeninin alanının maksimum olması için C noktasının apsisi kaç olmalıdır?

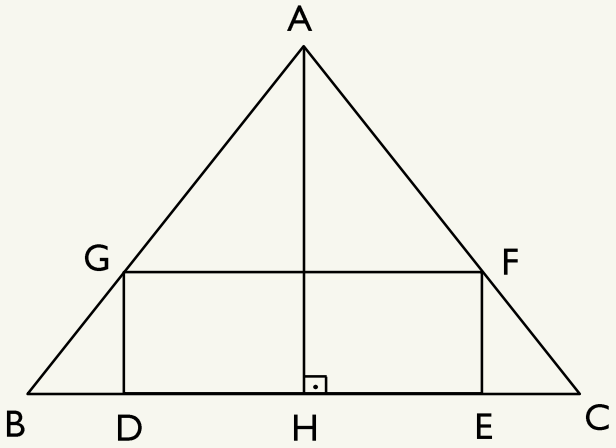
ÖRNEK

$y = \frac{4}{x}$ fonksiyonunun başlangıç noktasına en yakın olan noktasının, başlangıç noktasına uzaklığı kaç birimdir?

A) 8 B) 4 C) 2 D) $4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

ÖYS 1990

ÖRNEK



ABC üçgen, [AH] ⊥ [BC],

|AH| = 8 cm, |BC| = 10 cm'dir.

Buna göre, şekildeki DEFG dikdörtgeninin alanı maksimum kaç cm^2 'dir?

ÖRNEK

Yarıçapının uzunluğu 6 cm olan bir küre içine çizilebilecek en büyük hacimli silindirin yüksekliği kaç cm'dir?

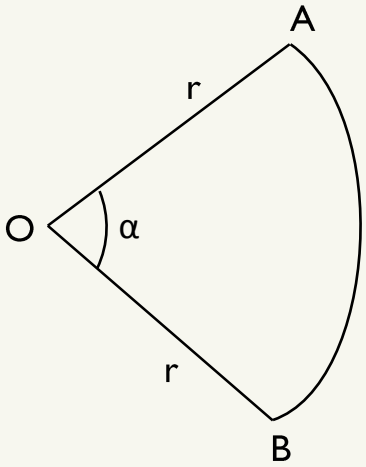
ÖRNEK

Yarıçapının uzunluğu 3 cm olan bir küre içine yerleştirilen en büyük hacimli dik koninin hacmi kaç cm^3 'tür?

ÖRNEK

Yarıçapı 6 birim olan bir yarım dairenin içine çizilebilecek dikdörtgenin alanı en fazla kaç birimdir?

ÖRNEK

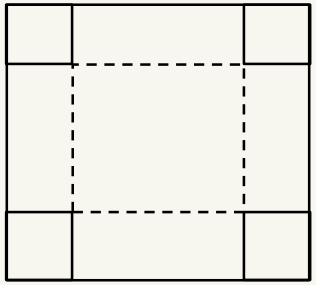


Şekilde verilen daire diliminin çevresi 6 birim olduğuna göre, alanı en fazla kaç br^2 'dir?

ÖRNEK

$x^2 - (a+2)x + 3a - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. Buna göre, köklerin karelerinin toplamının minimum değerini bulunuz.

ÖRNEK



Bir kenarı 10 birim olan kare şeklindeki kartonun köşelerinden 4 tane eş kare kesilip atılıyor. Daha sonra karton, şekildeki noktalı yerlerden katlanarak üstü açık dikdörtgenler prizması elde ediliyor. Buna göre, oluşan dikdörtgenler prizmasının hacmi en fazla kaçtır?

ÖRNEK

Bir tur şirketi, düzenleyeceği bir gezi için kişi başı 140 TL ücret talep etmektedir. Kayıt yaptıranların sayısının 80'den fazla olması halinde, 80'in üzerindeki her bir kişi için tüm katılımcılara 50'şer kuruş geri ödeme yapılacaktır. Kontenjan 200 kişi ile sınırlıdır. Örneğin, geziye 100 kişi katılırsa herkese 10'ar TL geri ödeme yapılıyor ve kişi başı 130 TL ücret alınmış oluyor. Buna göre, geziye kaç kişi katılırsa şirketin katılımcılardan elde edeceği gelir en fazla olur?

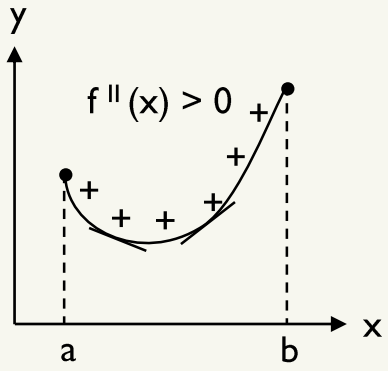
A) 160 B) 165 C) 175 D) 180 E) 185

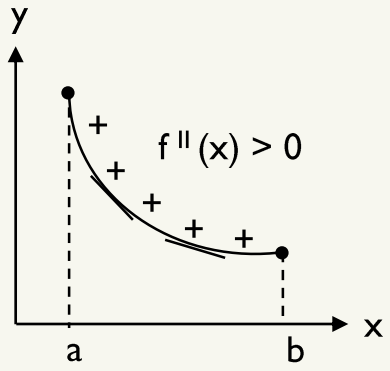
LYS 2013

İkinci Türevin Geometrik Yorumu

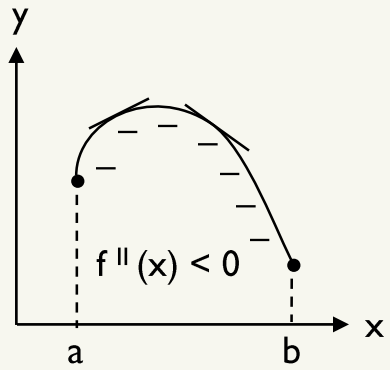
f: [a,b] ⟶ R fonksiyonunun (a,b) aralığında birinci ve ikinci türevleri olsun.

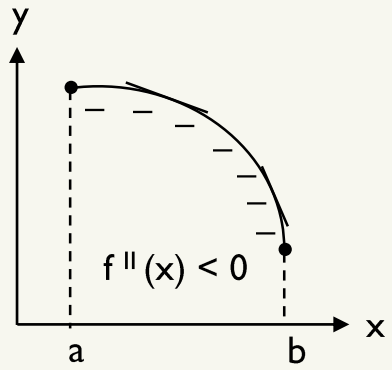
- (a,b) aralığında fonksiyonun ikinci türevi pozitif ise, eğrinin bükülme yönü yukarıya doğrudur. Bu aralıkta eğri konveks (dışbükey) tir.





- (a,b) aralığında fonksiyonun ikinci türevi negatif ise, eğrinin bükülme yönü aşağıya doğrudur. Bu aralıkta eğri konkav (içbükey) dır.





ÖRNEK

$f(x) = 18 - 4x^2$ fonksiyonunun konkav olduğu aralığı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 8$ fonksiyonunun konveks olduğu aralığı bulunuz.

ÖRNEK

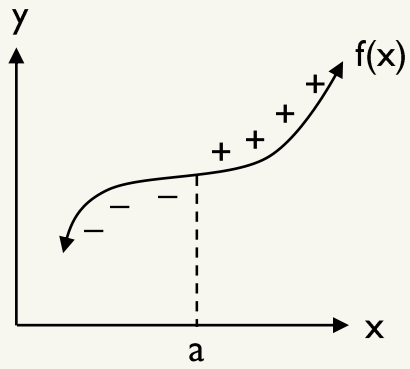
$f(x) = x^3 - x^2 + 6x - 3$ fonksiyonunun konkav olduğu aralığı bulunuz.

ÖRNEK

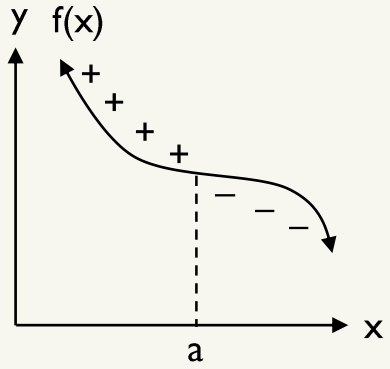
$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 4x - 5$ fonksiyonunun eğriliğinin yönü $\forall x \in R$ için daima yukarı doğru ise, a'nın tanım aralığını bulunuz.

Dönüm (Büküm) Noktası

Bir fonksiyonun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya **dönüm (büküm) noktası** denir.



$f''(a) = 0$
(Dönüm noktası)



$f''(a) = 0$
(Dönüm noktası)

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = ax^3 – bx^2 – 4x + 1$ fonksiyonunun dönüm noktası A (1, – 7) ise a + b'yi bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 12x - 2$ fonksiyonuna dönüm noktasından çizilen teğetinin y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

ÖRNEK

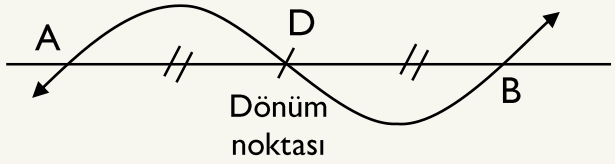
$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + a$ fonksiyonunun dönüm noktasından çizilen teğeti $y = bx - 5$ ise, a'yı bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = ax^3 - 4x^2 - bx - 1$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{3}$ 'te dönüm noktası ve $x = -1$'de ekstremum noktası olduğuna göre, b'yi bulunuz.

NOT:

3. Dereceden bir polinom fonksiyonun dönüm noktası, fonksiyonun simetri merkezidir.

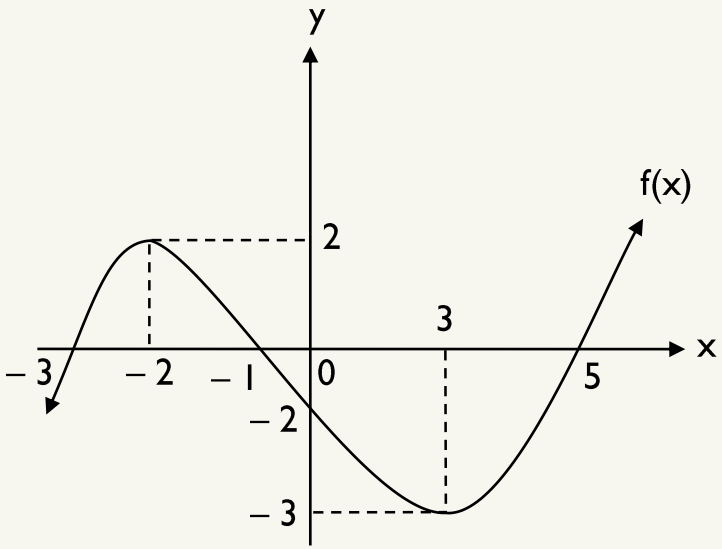


ÖRNEK

$f(x) = 2x^3 - ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun simetri merkezi A (1, – 1) ise, a + b + c 'yi bulunuz.

Grafik Yorumlama

ÖRNEK



Yandaki f(x) fonksiyonunun grafiğine göre;

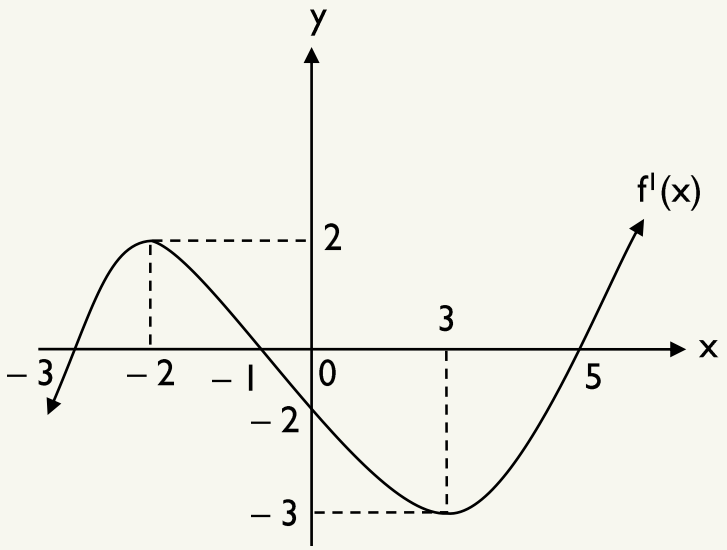
a) f fonksiyonunun artan olduğu aralığı bulunuz.

b) f fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulunuz.

c) $f'(3) \ldots 0$, $f'(5) \ldots 0$, $f'\left(-\frac{5}{2}\right) \ldots 0$

$f'(4) \ldots 0$, $f'(-2) \ldots 0$, $f'(-1) \ldots 0$

ÖRNEK



Yandaki $f'(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre;

a) f fonksiyonunun artan olduğu aralığı bulunuz.

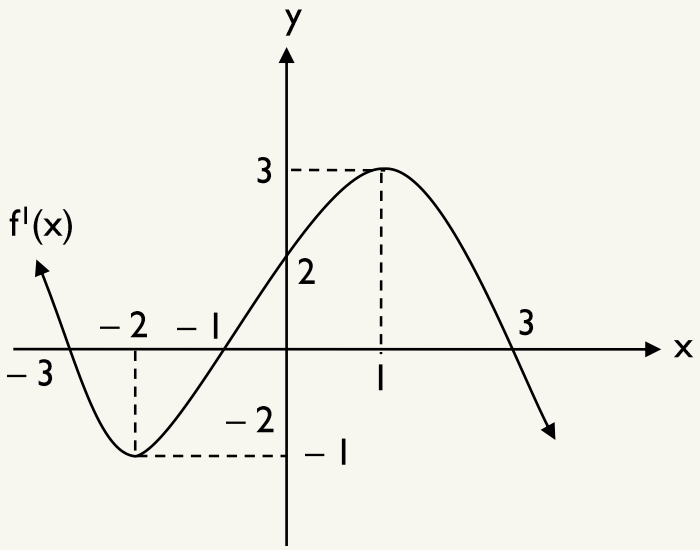
b) f fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulunuz.

c) $f'(3) \ldots 0$, $f'(5) \ldots 0$, $f'\left(-\frac{5}{2}\right) \ldots 0$

$f'(-3) \ldots 0$, $f'(-1) \ldots 0$, $f'(4) \ldots 0$

$f(-2) \ldots f(1)$, $f(4) \ldots f(7)$

ÖRNEK



Yanda, her noktada türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevinin (f'nün) grafiği verilmiştir. Yandaki verilenlere uygun olarak alınacak her f fonksiyonu için, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $-2 < x < -1$ aralığında artandır.

B) $0 < x < 3$ aralığında azalandır.

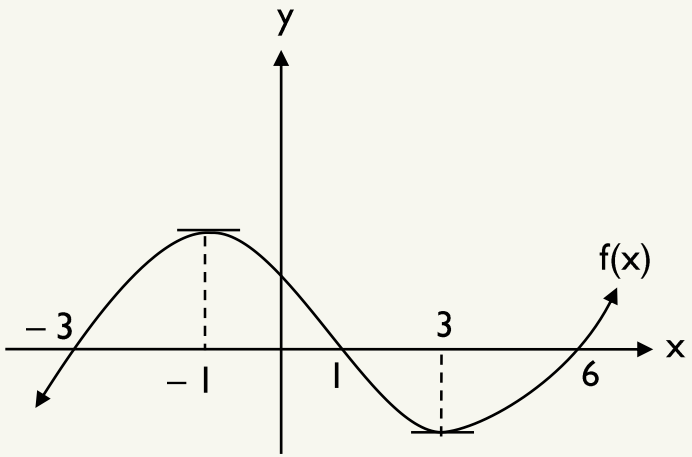
C) $x = 1$ 'de bir yerel maksimumu vardır.

D) $x = -1$'de bir yerel maksimumu vardır.

E) $x = -3$'te bir yerel maksimumu vardır.

ÖSS 2007

ÖRNEK



Yanda grafiği çizilen 3. dereceden bir polinom olan y = f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) Ekstremum noktalarının apsisleri toplamı 2'dir.

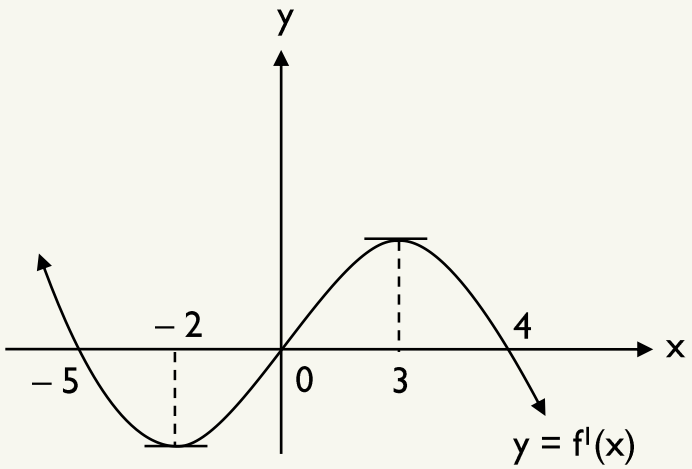
B) $1 < x < 6$ için $f''(x) > 0$ 'dır.

C) (– 1, 3) aralığında fonksiyon azalandır.

D) (– 3, – 1) aralığında fonksiyon konkavdır.

E) Fonksiyonun dönüm (büküm) noktasının apsisi x = 3'tür.

ÖRNEK



Yandaki $f'(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) f(x)'in ekstremum noktalarının apsisleri toplamı – 1'dir.

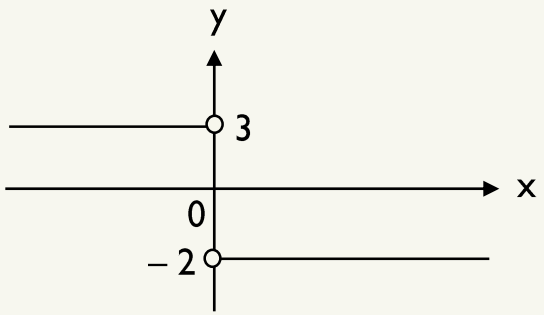
B) f(x) fonksiyonu (0,4) aralığında artandır.

C) f(x) fonksiyonu (– 2, 3) aralığında konvekstir.

D) f(x) fonksiyonu (– 5, – 2) aralığında konvekstir.

E) f(x) fonksiyonunun dönüm noktalarının apsisleri toplamı 1'dir.

ÖRNEK



Yanda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre,

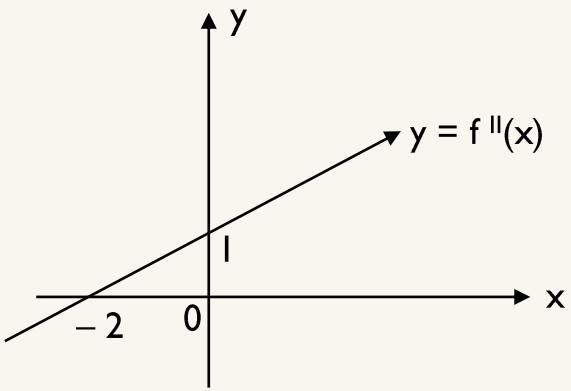
I. f(2) – f(1) = – 2'dir.
II. f fonksiyonunun x = 0 noktasında yerel maksimumu vardır.
III. İkinci türev fonksiyonu x = 0 noktasında tanımlıdır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) II ve III E) I, II ve III

LYS 2012

ÖRNEK



Yanda y = f(x) fonksiyonunun ikinci türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre;

I. f fonksiyonu (– ∞, – 2) aralığında konkavdır.
II. f fonksiyonu (– 2, ∞) aralığında konvekstir.
III. f fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi 2'dir.
IV. f^{I} fonksiyonu (– ∞, 2) aralığında azalandır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

Türevin Fiziksel Yorumu

Bir hareketlinin t saatte aldığı yol s(t) fonksiyonu ile verilsin.

1) Yol fonksiyonunun birinci türevi anlık hızı verir. Hareketlinin t anındaki hızı,

$V(t) = s^{I}(t)$ ile ifade edilir.

2) Yol fonksiyonunun ikinci türevi anlık ivmeyi verir. Hareketlinin t anındaki ivmesi,

$a(t) = V^{I}(t) = s^{II}(t)$ ile ifade edilir.

ÖRNEK

$s(t) = 3t^2 – 6t + 4$ hareket denklemi ile verilen cismin $t = 4$ saniye sonundaki anlık hızını ve ivmesini bulunuz.

ÖRNEK

$s(t) = 6t^3 – 4t^2 + 4$ hareket denklemi ile verilen cismin $t = 2$ saniye sonundaki anlık hızını ve ivmesini bulunuz.

Türevin Polinomlara Uygulanması

P(x) bir polinom fonksiyon ve a ∈ R ve n ∈ N olsun. P(x), $(x - a)^n$ ile tam bölünüyorsa;

$P(a) = P^{I}(a) = P^{II}(a) = \ldots = P^{(n-I)}(a) = 0$ olur.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom fonksiyonu $(x - 1)^3$ ile tam bölünebildiğine göre $a + b + c$ toplamını bulunuz.

ÖRNEK

P(x) polinom fonksiyonunun türevi $P^{I}(x)$ ve $P(x) - P^{I}(x) = 2x^2 + 5x - 3$ olduğuna göre, $P(x + 1)$ 'in katsayılar toplamını bulunuz.

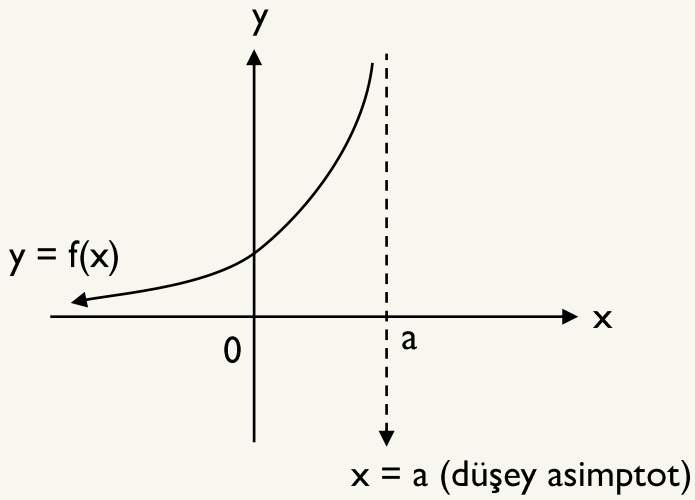
ÖRNEK

$x^3 + ax + b = 0$ denkleminin $x = 1$ 'de iki katlı kökü varsa a.b 'yi bulunuz.

Asimptotlar

Düşey Asimptot:

y = f(x) fonksiyonunun x = a noktasındaki soldan ya da sağdan limitlerinden en az birisi ∞ ya da – ∞ ise x = a doğrusuna y = f(x) fonksiyonunun düşey asimptotu denir.



$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ gibi sadeleştirilmiş rasyonel ifadelerde paydayı sıfır yapan x değerleri düşey asimptottur.

ÖRNEK

$f: R - \{2\} \longrightarrow R - \{-3\}$ olmak üzere;

$f(x) = \dfrac{-3x + 1}{x - 2}$ fonksiyonunun düşey asimptotunu bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x}$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulunuz.

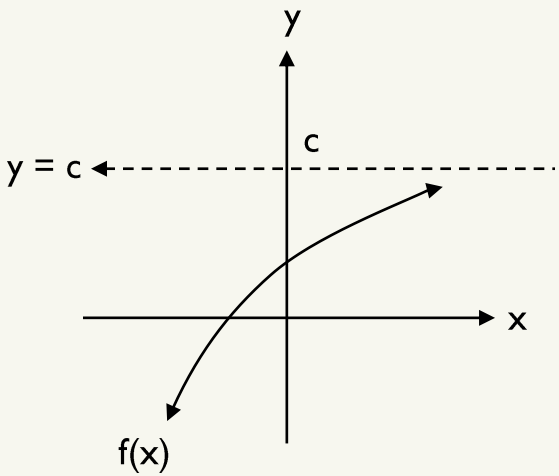
ÖRNEK

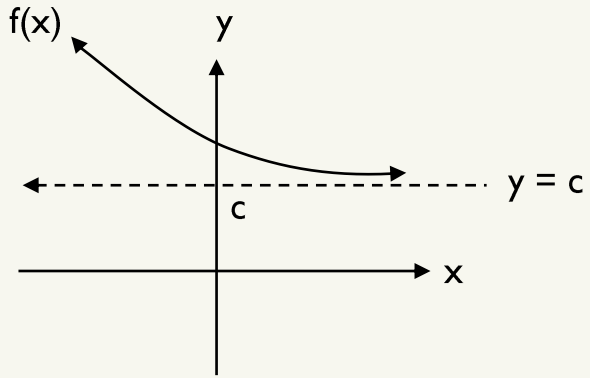
$f(x) = \dfrac{5x + 1}{x^2 - 2mx + m + 2}$ fonksiyonunun düşey asimptotu olmadığına göre, m'nin alabileceği değerlerin en geniş kümesini bulunuz.

Yatay Asimptot

y = f(x) fonksiyonu için;

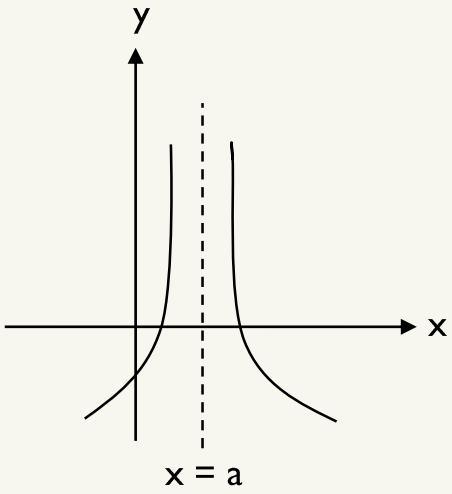
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$ ise y = c doğrusuna, y = f(x) fonksiyonunun yatay asimptotu denir.



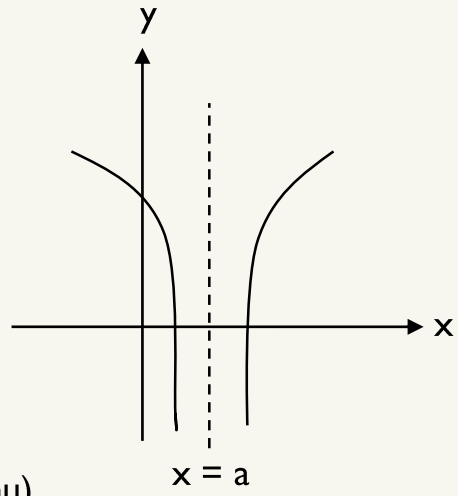


NOT: $n \in Z^+$ olmak üzere;

$f(x) = \dfrac{P(x)}{(x-a)^{2n}}$ için,

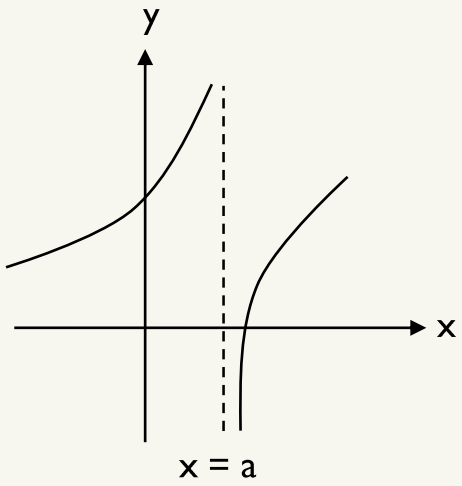


(Baca durumu)

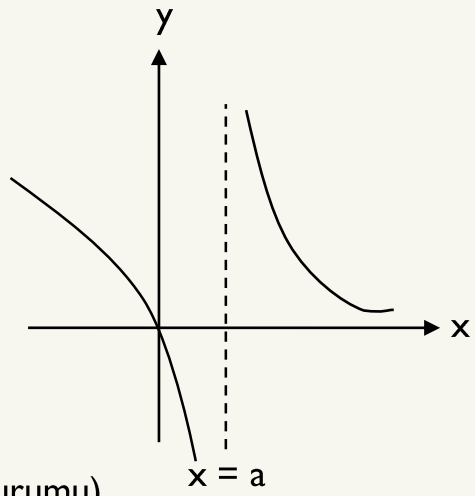


NOT: $n \in Z^+$ olmak üzere;

$f(x) = \dfrac{P(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ için,



(Kelebek durumu)



ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{5x + 2}{x - 3}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{ax + 3}{bx + 4}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktası (2, – 1) olduğuna göre, a + b 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{mx + 3}{x + m}$ eğrisinin asimptotları $y = 4x + 5$ doğrusu üzerinde kesiştiğine göre, m'yi bulunuz.

ÖRNEK

m,n sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere, $f(x) = \frac{x}{n} \sin\left(\frac{m}{x}\right)$ fonksiyonu $y = 2$ yatay asimptotuna sahiptir. Buna göre, m ile n arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

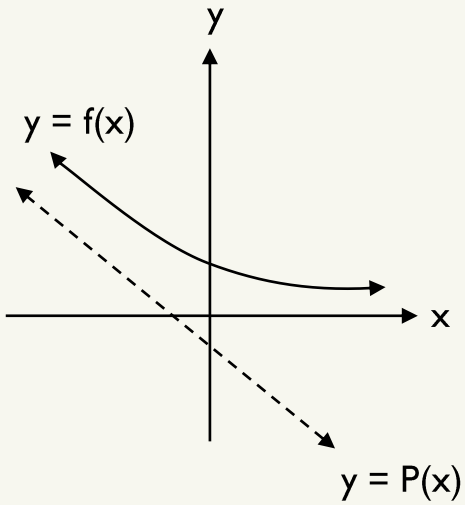
A) $m = n$ B) $m = n + 2$ C) $m = 2n$ D) $m = 3n$ E) $2m = 3n$

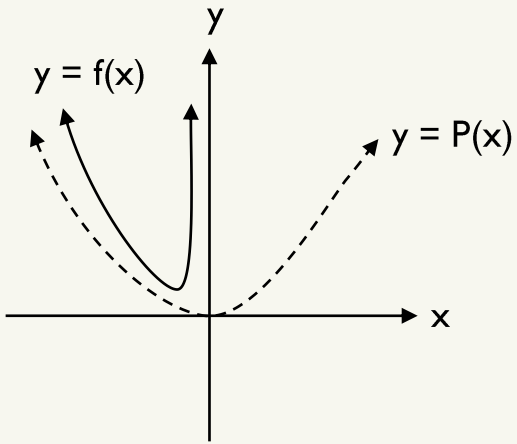
LYS 2013

Eğik veya Eğri Asimptot

y = f(x) eğrisi için;

$\lim_{x \to \infty} |f(x) - P(x)| = 0$ veya $\lim_{x \to -\infty} |f(x) - P(x)| = 0$ olacak şekilde bir P(x) polinomu varsa, y = P(x) eğrisine y = f(x) eğrisinin eğri veya eğik asimptotu denir.


y
y = f(x)
x
y = P(x)


y
y = f(x)
y = P(x)
x

NOT:

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki rasyonel fonksiyonlarda; payın derecesi, paydanın derecesinden büyük ise eğik veya eğri asimptot vardır. Asimptot bulunurken; pay, paydaya bölünerek, bölüm polinomu alınır.

Bölüm polinomunun derecesi 1 ise eğik asimptot,

Bölüm polinomunun derecesi 1'den büyük ise eğri asimptot vardır.

ÖRNEK

f: $R - \{3\} \longrightarrow R$ olmak üzere;

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 3}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulunuz.

ÖRNEK

f: $R - \{1\} \longrightarrow R$ olmak üzere;

$f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 6}{x - 1}$ fonksiyonunun eğri asimptotunu bulunuz.

NOT:

f(x) bir rasyonel fonksiyon olmak üzere; f(x)'in asimptotlarının kesim noktası, fonksiyonun simetri merkezidir.

ÖRNEK

f: $R - \{2\} \longrightarrow R$ olmak üzere;

$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x + 2}$ fonksiyonunun simetri merkezini bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = ax + 3 + \frac{1}{x + b}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktası $(-1, 3)$ ise $a + b$ 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 1}$ eğrisinin asimptotları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{x^2 + ax - b}{x - 2}$ fonksiyonunun eğik asimptotu $y = x - 4$ doğrusu ve fonksiyon $(3, -5)$ noktasından geçtiğine göre, $a - b$ 'yi bulunuz.

ÖRNEK

$f(x) = 2x.\ \tan\left(\frac{4}{x}\right)$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

Grafik Çizimi

Polinom Fonksiyonların Grafikleri

a) Tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ 'dur.

b) $y = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x))$ ile fonksiyonunun $\pm\infty$ daki değeri belirlenir. Burada bulunan değerler, eğrinin uçlarının yer aldığı bölgeleri belirler.

c) Eksenleri kestiği noktalar tespit edilir.

$x = 0$ için y eksenini kestiği,

$y = 0$ için x eksenini kestiği noktalar bulunur. x'in tek katlı köklerinde eğri x eksenini keser, çift katlı köklerde eğri x eksenine teğettir.

d) $y^{I} = 0$ denkleminin kökleri yerel maksimum ya da yerel minimum olmaya aday noktalardır. Kökler ve bu köklere karşılık gelen y değerleri bulunur.

e) Değişim tablosu yapılır. Bulunan tüm veriler tabloya aktarılır.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f^{I}(x)$			
f(x)			

Türevin işareti incelenirken en büyük kökünün sağına y^{I}in en yüksek dereceli teriminin işareti yazılır. Tek katlı köklerde işaret değişir, çift katlı köklerde işaret değişmeden tablonun işaretleri tamamlanır.

f) Tablodaki bilgiler ile grafik çizilir.

ÖRNEK

$y = x^3 - 4x$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

a) Tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ 'dur.

b) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x) = +\infty$

c) x = 0 için y = 0 (0, 0) noktasından geçer.

y = 0 için $0 = x.(x^2 - 4)$

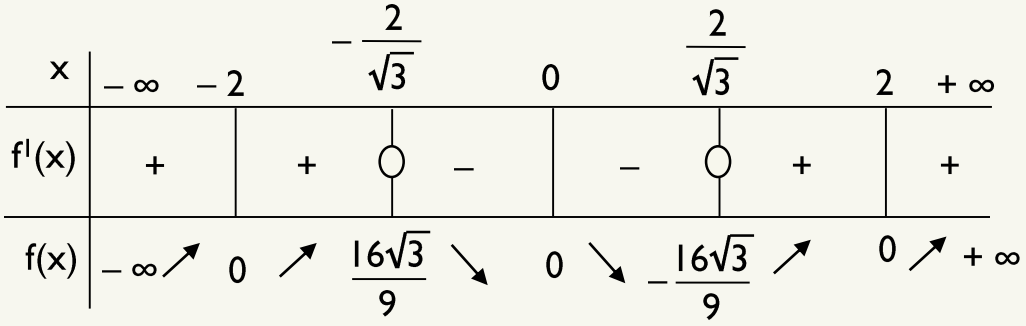
$0 = x.(x - 2).(x + 2)$

(0, 0), (2, 0), (– 2, 0) noktalarında x eksenini keser.

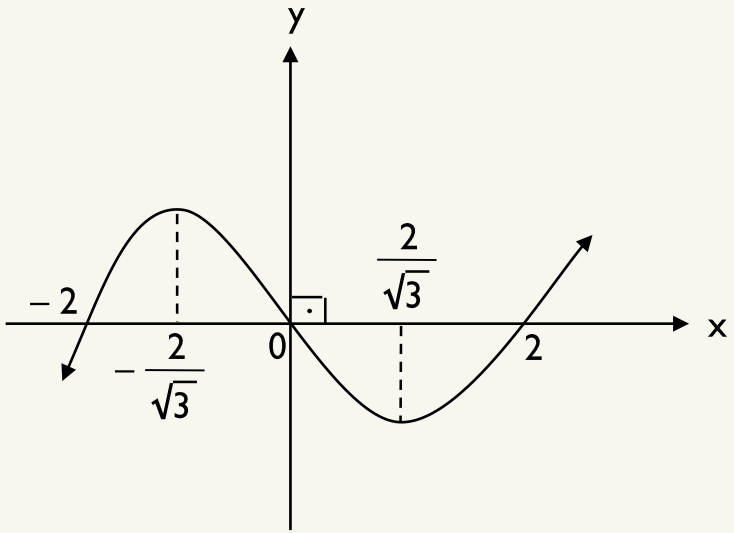
d) $y' = 3x^2 - 4$

$3x^2 - 4 = 0$ ise $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ apsisli noktalar ekstremum nokta olmaya aday noktalardır.

e)



f)



Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri

a) Tanım kümeleri bulunur. Paydanın kökleri fonksiyonu tanımsız yapar.

b) Asimptotlarının incelemesi yapılır.

c) $y' = 0$ denkleminin kökleri yardımıyla maksimum, minimum olmaya aday noktalar belirlenir.

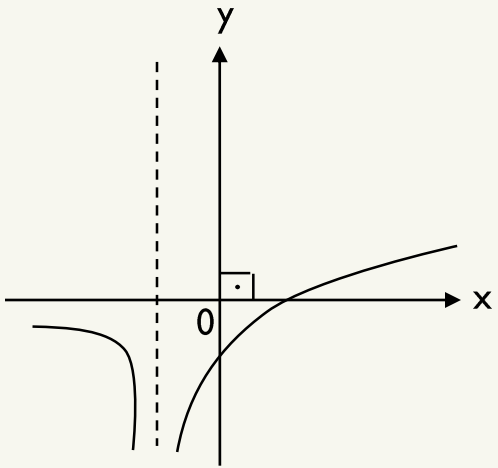
d) Eksenlerin kesim noktaları bulunur.

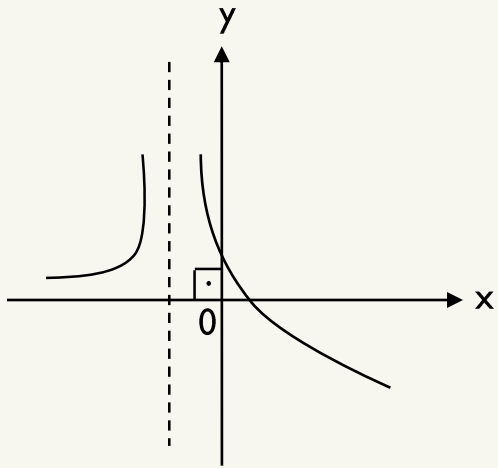
e) Değişim tablosu yapılır.

f) Bilgiler yardımıyla grafik, koordinat düzleminde çizilir.

NOT:

Paydayı sıfır yapan değer çift katlı kök ise grafiğin şekli bacaya benzer.





ÖRNEK

$y = \frac{1}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

a) $x - 2 = 0$, $x = 2$ 'de tanımsızdır.

f: $R - \{2\} \longrightarrow R$ tanımlıdır.

b) $x = 2$ paydayı sıfır yaptığından düşey asimptottur.

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x - 2} \right) = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimptottur.

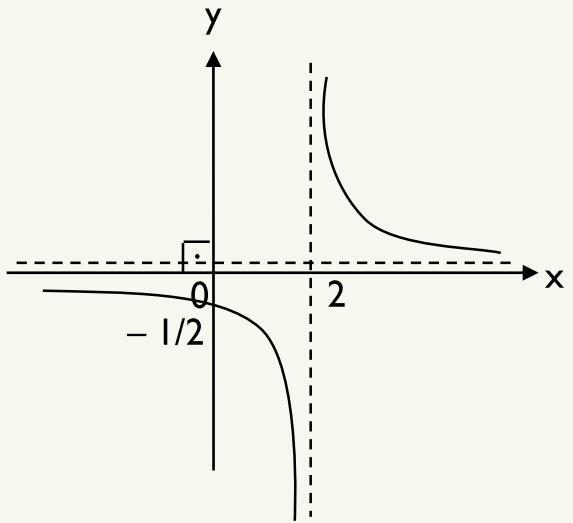
c) $y' = \frac{-1}{(x - 2)^2}$ daima negatif olduğundan f daima azalandır.

d) $x = 0$ için $y = -\frac{1}{2}$ dir.

$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ de y eksenini keser.

e)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0



Üstel Fonksiyonların Grafikleri

$y = a^{f(x)}$ üstel fonksiyonunun değişimi $u = f(x)$ 'in değişimi incelenerek belirlenir.

ÖRNEK

$y = 2^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

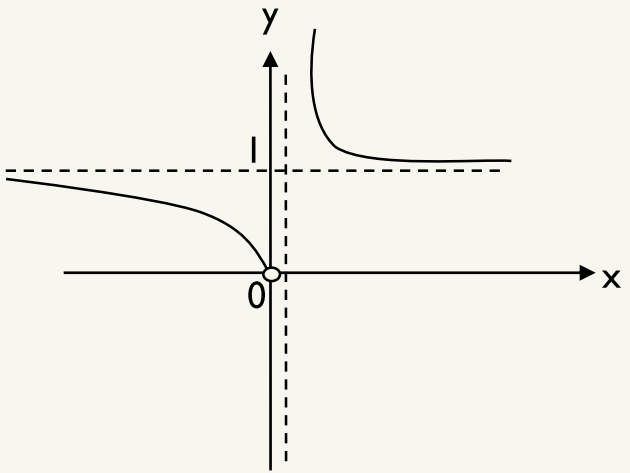
a) $x = 0$ için $\frac{1}{x}$ tanımsız olduğundan $R - \{0\}$ 'da tanımlıdır.

b) $x = 0$ 'da düşey asimptot vardır.

$\lim_{x \to \pm\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{\infty}} = 2^0 = 1$ yatay asimptottur.

c) $y' = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{-} \cdot \underbrace{2^{\frac{1}{x}}}_{+} \cdot \underbrace{\ln 2}_{+}$ olduğundan $y' < 0$ daima azalandır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	$-$	$-$		$-$	$-$ $-$
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\searrow$



İrrasyonel Fonksiyonların Grafikleri

$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonunun grafiği çizilirken;

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$ ile tanım kümesi bulunur.

b) $a > 0$ ise, $y = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ eğik asimptottur.

c) $y' = 0$ için ekstremum nokta incelenir.

d) $x = 0$ için y eksenini kestiği nokta,
$y = 0$ için x eksenini kestiği nokta bulunur.

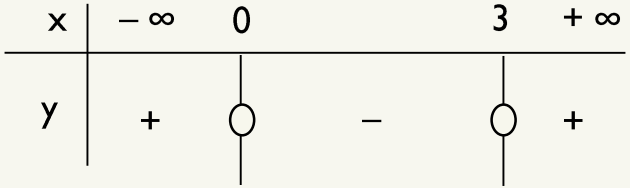
e) Değişim tablosu hazırlanıp, grafik çizilir.

ÖRNEK

$y = \sqrt{x^2 - 3x}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

a) $x^2 - 3x \geq 0$ tanım kümesini verir.



R – (0, 3) kümesinde tanımlıdır.

b) $y = \sqrt{1}\left|x + \frac{-3}{2}\right|$, $y = x - \frac{3}{2}$

$y = -x + \frac{3}{2}$

} Eğik asimptot

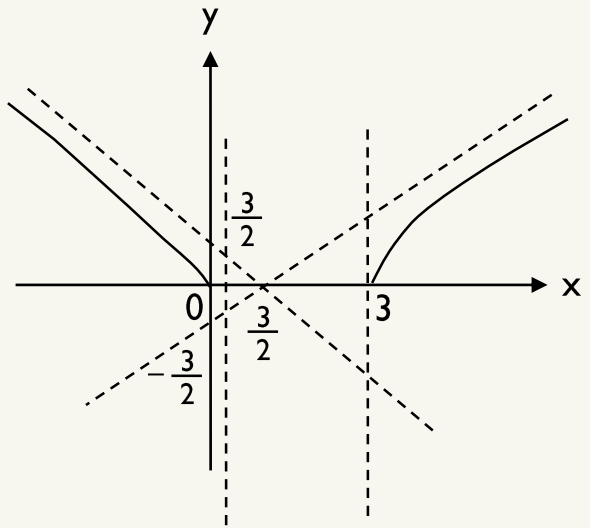
$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 3x}) = +\infty$

c) $y' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$, $2x-3=0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \in R-(0,3)$

d) x = 0 için y = 0

y = 0 için x = 0 ve x = 3 'tür.

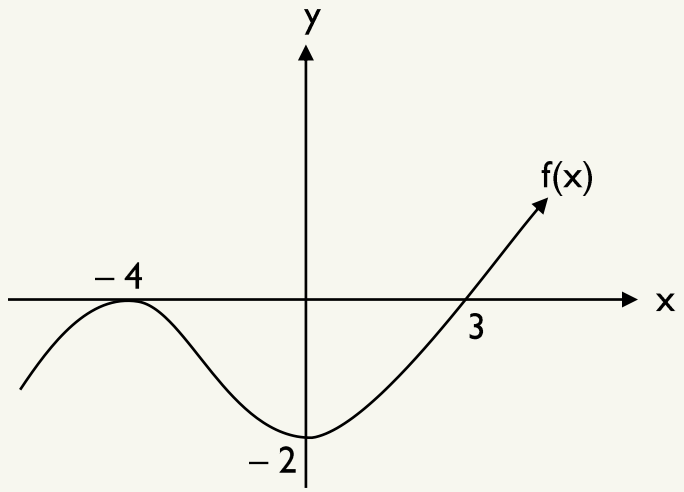
x	$-\infty$			0		3		$+\infty$
y'	−	−	−	tanımsız		+	+	+
y	$+\infty$	↘	↘	$+\infty$		0	↗	↗ $+\infty$
				0				



Grafik

ÖRNEK

Yanda grafiği verilen eğrinin denklemi $f(x) = a\,(x + c)^2\,(x + d)$ olduğuna göre, $a + c + d$ toplamını bulunuz.



ÖRNEK

Yanda grafiği verilen f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

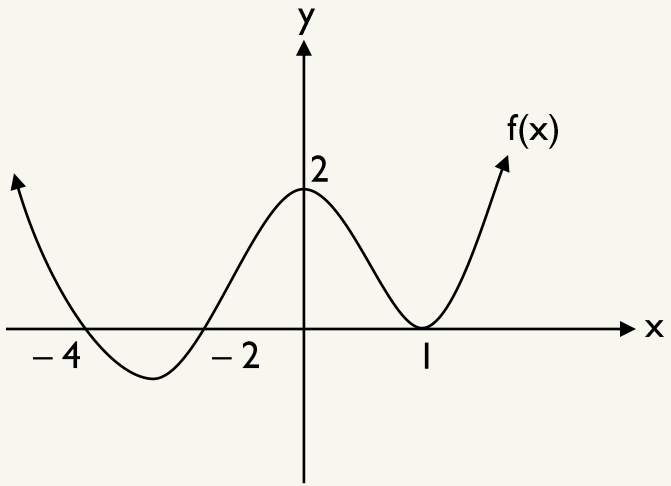
A) $f(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2(x+2)(x-1)$

B) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+4)(x+2)(x-1)$

C) $f(x) = \frac{1}{4}(x+4)(x+2)(x-1)^2$

D) $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)(x+2)(x-1)$

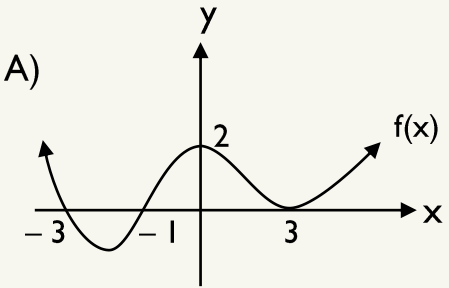
E) $f(x) = (x+4)(x+2)(x-1)^2$



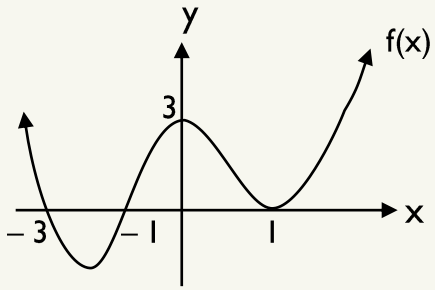
ÖRNEK

$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

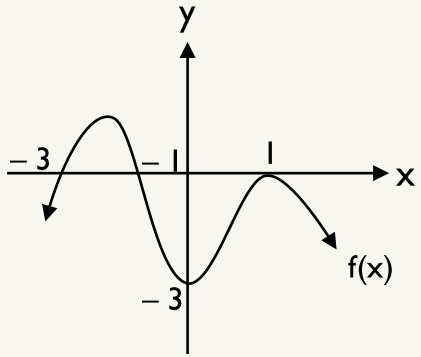
A)



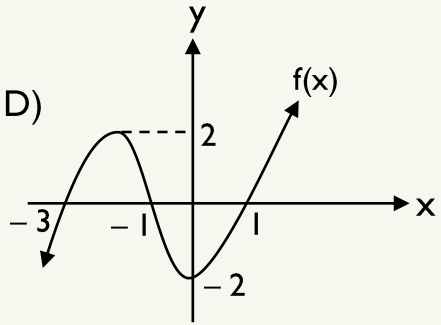
B)



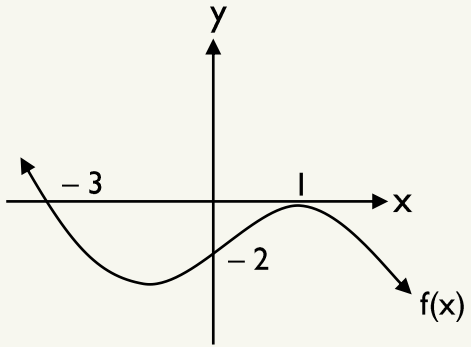
C)



D)



E)



ÖRNEK

Şekildeki grafik, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?

A) $\frac{x^2 + x - 3}{(x-2)^2}$

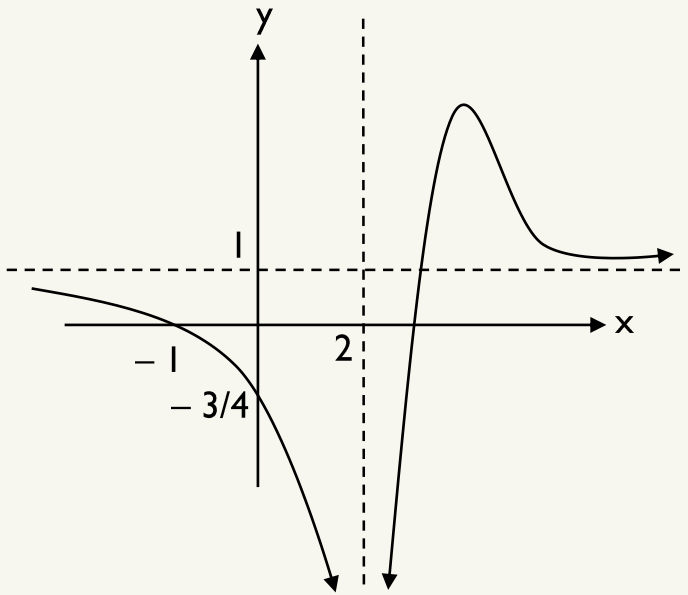
B) $\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-2)^2}$

C) $\frac{x^2 - 2x - 3}{2\,(x+2)}$

D) $\frac{x^2 - x - 3}{(x+2)^2}$

E) $\frac{x^2 - 3x - 2}{(x-2)^2}$

ÖYS 1996



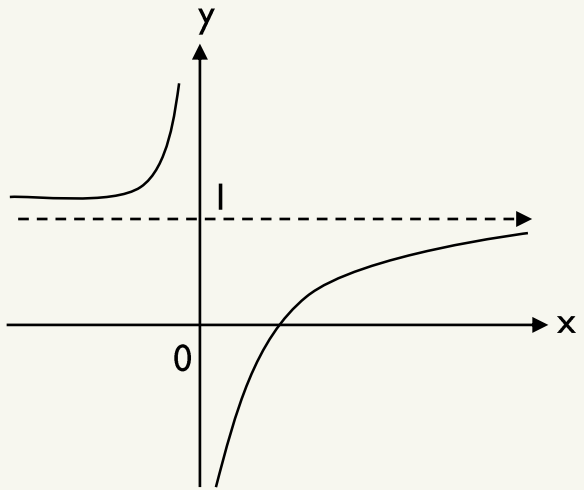
ÖRNEK

Şekildeki grafik, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?

A) $y = \frac{x - 1}{x}$ B) $y = \frac{x + 1}{x}$ C) $y = \frac{x}{x - 1}$

D) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ E) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

ÖYS 1997



ÖRNEK

Şekildeki grafik, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?

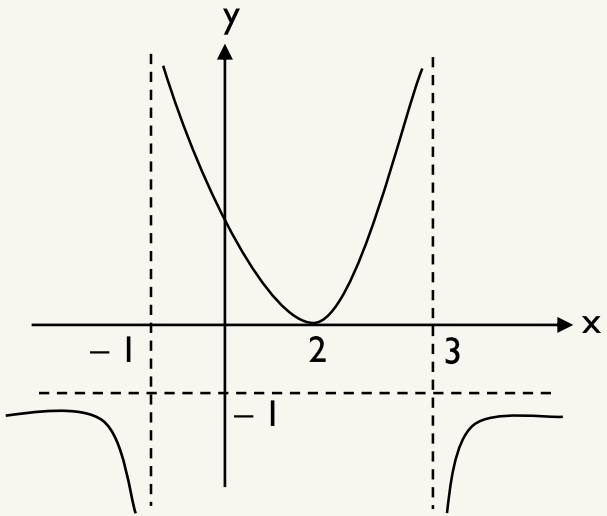
A) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 3}$

B) $y = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 2x - 3}$

C) $y = \dfrac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

D) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{-x^2 - 2x + 1}$

E) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 2x + 1}$

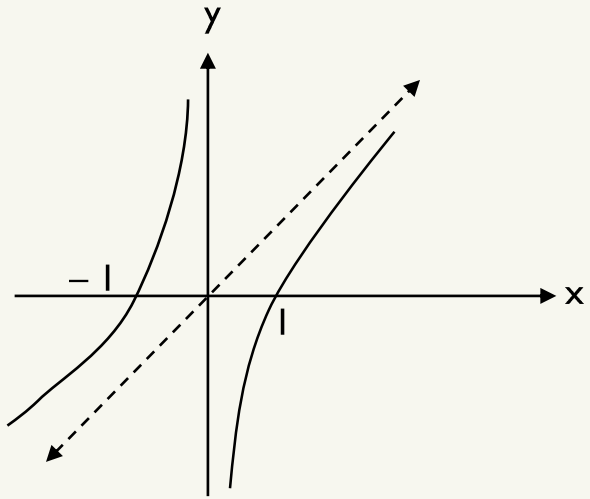


ÖRNEK

Yanda çizilmiş f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ B) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ C) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

D) $y = \frac{x^2 - 2}{x}$ E) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$



ÖRNEK

Yanda grafiği verilen f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$

B) $y = \frac{x+2}{(x-1)^2}$

C) $y = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2$

D) $y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$

E) $y = \left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)^2$

